

Math. P.

620

d

Math. P.

6202

Douglas

ÜBER

ZIELE UND HÜLFSMITTEL

GEOMETRISCHER

PRÄCISIONS-NIVELLEMENTS

VON

DR. CHR^N. AUGUST VOGLER

INGENIEUR.

MÜNCHEN.

Literarisch-artistische Anstalt (TH. RIEDEL)

vormals der COTTA'schen Buchhandlung.

1873.



Dem Andenken

seines verehrten Lehrers der Mathematik,

HERMANN WERREN,

Herzogl. Nassauischen Oberstlieutenants,

gestorben 1870 zu Wiesbaden

dankbar gewidmet

vom

Verfasser.

Dear Madam

Very much obliged to you for the

THE RIVAL WARRIORS

by the Author of the

THE RIVAL WARRIORS

Yours truly

Yours

INHALT.

	Seite
Einleitung	1
Cap. I	2

§. 1. Die Fläche, von der alle Höhenmessungen ausgehen, ist nothwendig der Meerespiegel oder »die hydrostatische Erdoberfläche.« — §. 2. Auch die geometrischen Nivellements beziehen sich darauf oder müssen, wenn sie in einzelnen Fällen vom Meerespiegel abweichen, durch Correctionen darauf zurückgeführt werden. S. 2. — §. 3. Abstract betrachtet wird eine solche schon auf dem regelmässigen Umdrehungsellipsoid nöthig, fällt aber unmeßbar klein aus. S. 3. — §. 4. Die Niveaux sind nicht concentrisch, ihre Abplattung nimmt mit der Höhe über dem Meerespiegel zu. Da sich die Ziellinie geometrischer Nivellements immer dem Niveau anschliesst, in welchem sie sich gerade befindet, so ist sie nicht mehr parallel dem Meerespiegel; demnach verlangt das Nivellement im Hochland eine merkliche Reduction. S. 6-12. — §. 5 und 6. Dagegen ist jene Abweichung geometrischer Nivellements meist klein, welche durch Unsymmetrie der Erdbögen im Rück- und Vorblick und ungleichen Abstand der tangentialen Visirlinien von denselben entsteht, auch wenn die Erdbögen stark vom mittleren Sphäroid abweichen, wie sich in §. 6 an zwei aus Beobachtung geschöpften Beispielen zeigt. S. 12-21. — §. 7. Die Störungen der Niveaux sind nicht in allen Höhen gleichartig, wodurch unter Umständen starke Divergenzen vom Meerespiegel entstehen können. §. 8. Das zur Erläuterung gewählte hypothetische Beispiel bestätigt zugleich die vorige Behauptung. S. 21-25. — §. 9. Dasselbe Beispiel dient zum Beweise, daß wohl starke Niveau-Abplattungen, aber keine Einsenkungen auf der Erdoberfläche denkbar sind. S. 25. — §. 10. Die Lage der Niveaux ist keine stabile. Tägliche Veränderung analog der Ebbe und Fluth; deren Einfluss auf geometrische Nivellements. S. 26-29. — §. 11 und 12. Säculare Niveauveränderungen, einmal durch den Mond, S. 29-31, sodann durch Kräfte, die im Erdinnern wirken. S. 31. Der Spiegel des Meeres gestattet die scheinbaren oder wirklichen Bewegungen der Erdrinde nur an den Küsten

zu verfolgen, genaue Nivellements auch im Binnenland. Es ist wünschenswerth, beide Arten der Beobachtung auf einen gröfseren Theil der Erdoberfläche auszudehnen.

Cap. II 32

§. 13. Genaue Arbeit verlangt Kenntnifs der möglichen Fehler, die theils durch vorausgehende Prüfung der Instrumente und ihrer Leistung, theils während der Arbeit selbst gewonnen wird. Das beste Verfahren beim Nivellement ist jenes, welches den Fehler sowohl zu erkennen, als auch beliebig einzuschränken erlaubt. S. 32-35. — §. 14. Einzelbetrachtung der Instrumentalfehler. Der Libellenfehler; bei feinen Libellen empfiehlt sich das Nivellement mit geneigter Achse, wodurch eine Correction nöthig wird. S. 35-38. — §. 15. Fehler im Parallelismus der Fernrohr- und Libellenachse. Nur deren Veränderlichkeit ist schädlich, wenn »aus der Mitte« nivellirt wird. S. 38-40. — §. 16. Fehlerwirkung der Stativtheile. S. 40. — §. 17. Der wichtigste Instrumentalfehler ist der Visur- oder Zielfehler. Versuche von STAMPFER und HIRSCH, seine Gröfse zu erkennen. Die Ergebnisse beider widersprechen sich nur scheinbar. S. 41-43. — §. 18. Ausser den persönlichen Schätzungsfehlern übt die Refraction auf die Unsicherheit der Visur den gröfsten Einfluss in zweierlei Hinsicht. Das Zittern der Bilder wird durch Spiegelung der Linsenflächen noch vermehrt. S. 43-45 — §. 19. Noch gefährlicher sind langsame Vibrationen der Mittellage der Lichtstrahlen. Zweierlei Verfahren, sie zu erkennen und unschädlich zu machen. S. 45-48. — §. 20. Der Nivellirfehler ist nicht der Zielweite proportional, also die Wahl derselben nicht gleichgültig. Sie erfolgt am besten während der Arbeit selbst auf Grund der Fehlerermittelung und nach einer festen Regel. Mit der Einschränkung der Fehlergrenze hält die Vermehrung des Aufwandes an Zeit und Mühe nicht gleichen Schritt; dies spricht für kleine Zielweiten. S. 48-52. — §. 21. Bei unbeschränkter Zielweite wachsen die Fehler mit ihr in mehr als quadratischem Verhältnifs, man kann aber Zielweite und Fehler so beschränken, dafs letztere nur mit der Wurzel aus der Entfernung wachsen. S. 52-57. — §. 22. Geschieht dies, so tritt der Visurfehler hinter den Fehler der Scaleneinheit zurück, der proportional den durchgemessenen Höhenunterschieden wächst und theils aus der variablen Ausdehnung des Lattenmaterials, theils aus schlechter Scalentheilung entsteht. S. 57-63. — §. 23. Die Fehler, welche in den Anschlüssen von Nivellements verschiedener Länder auftreten, lassen sich am besten durch ungleiches Scalenmafs erklären; dieses aber nicht durch Lattenbiegungen, sondern durch die vorigen Urfachen. S. 64-68. — §. 24. Darum empfiehlt sich Metall als Lattenmaterial und die einheitliche Ausführung der Scalen unter Controle. S. 69.

Cap. III 70

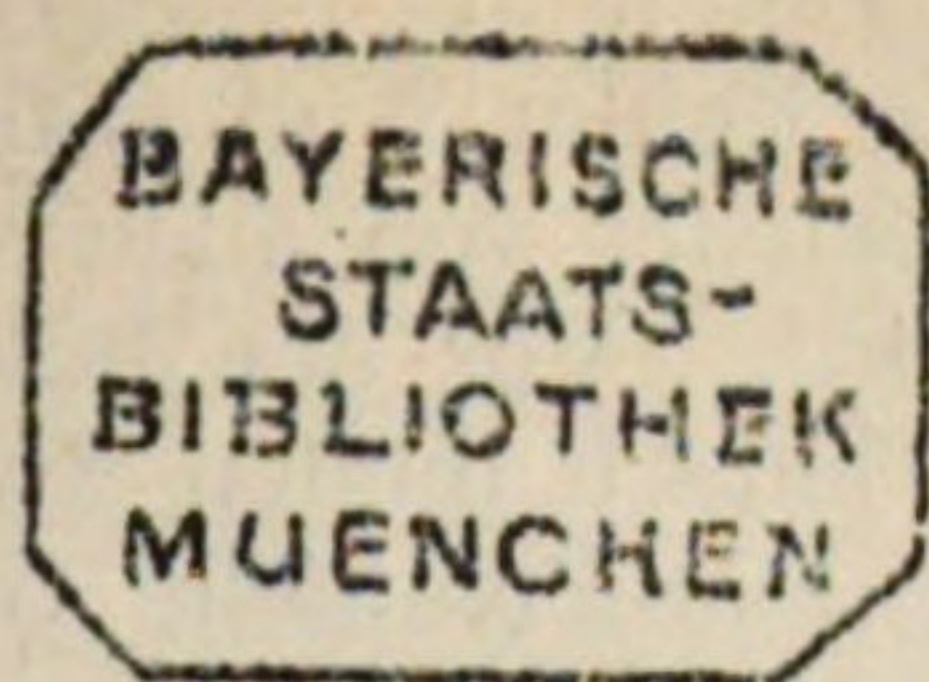
§. 25. Zwei unter sich eng verwandte Aufgaben werden durch gute Höhenmessungen wesentlich gefördert, die Bestimmung der Erdkrümmung auf rein geodätischem Wege und die Refractionsbeobachtungen, durch deren Ergebnifs das erstere Problem erst lösbar wird. Die technische Ausführung beider

Aufgaben stützt sich auf dieselben geodätischen Operationen und es handelt sich darum, deren Fehler möglichst zu reduciren. S. 70-73. — §. 26. Die Genauigkeit des geodätischen Theils der Mefung bleibt unberührt von der Form der Erd- und Lichtcurve, weshalb es sich empfiehlt, deren Gleichungen zu übereinstimmender Behandlung in die Form TAILOR'scher Reihen zu bringen. Darstellung der Beobachtungsgrößen durch diese Gleichungen. S. 73-77. — §. 27. Vortheilhafter Gang der Beobachtung. S. 77-79. — §. 28. Entwicklung der Gleichungsconstanten und ihrer wahrscheinlichen Fehler aus den Beobachtungsgrößen. Es zeigt sich, daß nur große Standlinien der Arbeit günstig sind. Andernfalls bleiben die möglichen Abweichungen der Erdkrümmung vom mittleren Sphäroid kleiner als der wahrscheinliche Fehler ihrer Bestimmung. Auch die Refraction, obwohl ihr Mittelwerth mehr beträgt als jene Abweichungen, läßt sich nur auf großen Standlinien genau ermitteln, wobei zugleich die relativen Fehler der astronomischen Hülfsmessung am günstigsten ausfallen. S. 79-84. — §. 29. Die Höhenmessung, auf welche sich die vorhergehend besprochenen Operationen stützen, darf keine neue Fehlerquelle werden, sie wird es aber bei stärkerer Neigung der Visuren als 1^0 , wenn nicht für Verminderung der Unsicherheit der Lattenlänge bei den Präcisionsnivellements Sorge getragen wird. S. 84.

Cap. IV 85

§. 30. Die Aufbewahrung der Nivellementsergebnisse wird ermöglicht durch dauerhafte Stützpunkte, worunter jene, welche (nach Zeit und Weg der Aufnahme getrennte) Nivellements mit einander verknüpfen, Knotenpunkte verschiedener Ordnung bilden. Höhenmarken und deren Formen, Vorzüge und Nachtheile. S. 85-90 — §. 31. Ausgleichung von einzelnen Schleifen, von Polygongruppen und ganzen Höhennetzen, wenn die wahrscheinlichen Beobachtungsfehler der einzelnen Knotenverbindungen bekannt sind. S. 90-93. — §. 32. Ausgleichung ohne vorgängige Kenntniß der wahrscheinlichen Fehler oder der Gewichtsverhältnisse. Gang der indirecten Rechnung an einem, theilweise der Wirklichkeit entnommenen, Zahlenbeispiele erläutert. S. 93.

Nachtrag zu §. 10 102



Einleitung.

Seit dem Jahre 1864 sind, veranlaßt durch den Vorschlag des Professors HIRSCH zu Neuchâtel, in den meisten Ländern, welche sich zur europäischen Gradmessung verbunden haben, genaue geometrische Nivellements, sogenannte Präcisionsnivellements, ausgeführt worden und ihre gegenwärtige Ausdehnung sowie die bisher dabei gewonnenen Erfahrungen machen es möglich ein Urtheil darüber zu fassen, in wie weit diese Arbeiten den Anforderungen ihres Titels entsprechen und welches Zutrauen sie als künftige Grundlagen der Wissenschaft verdienen. Freilich ist im Grunde nur die Geographie an den Resultaten der Nivellements unmittelbar interessirt, doch haben sie auch für andere Zweige der exacten Wissenschaften den Werth empirischen Materials, das einer früheren oder späteren Verwendung harret: so wird sie die Geodäsie zur Reduktion ihrer Grundlinien auf den Meerespiegel, die Physik zur Prüfung der Barometerformel, der terrestrischen Refraction, der Pendellängen verwerthen können. Anderen wieder sollen sie den Boden für zukünftige Beobachtungen erst geben, so der Geologie zur Bestätigung vermutheter Bodenhebungen im Binnenland, der Meteorologie zum Nachweis der unveränderlichen gegenseitigen Lage der Meerespiegel etc. Wenn auch zur Befriedigung einiger dieser Anforderungen eben keine hohe Genauigkeit gehört, so verlangen andere wieder fast absolute Sicherheit des Resultats, alle aber, daß man den Grad der Annäherung an die Wahrheit mit Bestimmtheit kenne oder den Spielraum anzugeben vermöge, innerhalb dessen das Resultat von der Wahrheit abweichen mag. So würde z. B. das geographische Ziel der Präcisionsnivellements, die Festsetzung eines gemeinsamen Ausgangs- oder Nullpunktes für alle Höhenmessungen in Europa, sogleich hinfällig, wenn die Genauigkeit der Arbeit nicht hinreichte, die etwa gefundenen Niveaudifferenzen getrennter Meere auch zu verbürgen. Wo nun im Folgenden die Frage nach Genauigkeit beantwortet wird, geschieht es zuweilen durch den Grenzfehler, den größten, den wir begehen können; häufiger aber durch den wahrscheinlichen Fehler oder denjenigen, welcher alle möglicherweise von uns begangenen ohne Rücksicht auf Vorzeichen in zwei Gruppen von

gleicher Zahl trennt, deren eine lauter grössere, der andere nur kleinere Fehler, darunter auch den Fehler Null enthält, oder kürzer gesagt durch denjenigen Fehler, welcher von allen wirklichen ebensooft übertroffen als nicht erreicht wird. Vor der Betrachtung der Genauigkeit geometrischer Nivellements jedoch müssen wir uns zu einer wichtigen Vorfrage wenden und die mathematische Grundlage kennen lernen, auf welche jene ihre Höhenangaben beziehen.

Cap. I.

§. 1. Der Geograph oder Geologe, welcher die Resultate der Präcisionsnivellements zu benützen wünscht, erkennt sogleich, daß in Hinsicht der Ausgangsfläche und der Richtung, in welcher die Höhenangaben zählen, noch eine Wahl möglich ist und fordert darüber Entscheidung. In manchen Fällen fassen wir die Erdoberfläche mit hinreichender Berechtigung kugelförmig auf und die Lothrichtungen als Radien der Kugel; dann wieder strenger als die Oberfläche eines elliptischen Sphäroids mit der mittleren Abplattung 1:299 und denken uns diese ideale Erdhülle das Meeresniveau berührend, sodaß sich die geographische Oberfläche der Erdveste mit ihren Gebirgskanten und Zacken theils darüber erhebt, theils im Meeresgrund und einzelnen tiefen Thälern darunter senkt, und die Erdlothe oder Richtungen der Schwere denken wir uns dann als Normalen dieses Sphäroids. Zahlreiche mühevollen Breitengradmessungen haben die theoretisch festgestellte sphäroidische Form der Erde im Großen wirklich erwiesen, dabei aber im Einzelnen manche Abweichung gezeigt, die sich durch Messungsfehler in den Polhöhen oder geodätischen Verbindungslinien der Sternwarten nicht erklären lassen. Neben den Lothstörungen in Meridianrichtung haben die Längengradmessungen solche in westöstlicher Richtung aufgedeckt und wir müssen uns vorstellen, daß einzelne Lothbüschel stärker, andere schwächer divergirend aus der Erde hervortreten, als es die Normalen des Sphäroids an derselben Stelle thun würden. Daraus folgt, daß weder Kugel noch Ellipsoid die wahre Erdgestalt vollkommen darstellen, daß vielmehr beide nur als Vermittelungs- oder Interpolationsflächen mehr oder weniger geeignet sind, unserer Vorstellung von der wahren Erdoberfläche als Grundlage zu dienen. Die Bedeutung der Worte: Lothabweichung, Lothstörung, wechselt mit unserem Begriff über die ideale Erdform und mit deren Dimensionen. Unter der Bedingung, daß die Differenzenquadrate zwischen den beobachteten und ausgeglichenen Polhöhen aller jener Sternwarten, welche bei Gradmessungen betheiligt waren, sich zu einer Minimalsumme addiren, gleich zuletzt BESSEL die vorhandenen Beobachtungen aus und BESSEL's Erddimensionen pflegen wir unserer Vor-

stellung von der Erdgestalt sowie neuen Beobachtungen zu Grunde zu legen. Diejenige continuirliche Fläche aber in Meereshöhe, welche allenthalben die wahren Lothrichtungen senkrecht schneidet und welche wir uns durch das Festland hindurch fortgesetzt denken, bildet die wahre mathematische Erdhülle; man könnte sie zum Unterschied von der geographischen die hydrostatische nennen, weil sich das Meereswasser, in Stollen durch das Festland geleitet, nach dieser Fläche in's Gleichgewicht stellen würde. Ueber und unter ihr lassen sich ähnlich construirte Flächen denken, welche mit der ersten im Allgemeinen gleiche Eigenschaften und die Achsen gemein haben. Sie alle heißen Horizontalflächen (niveaux), zuweilen auch kurz Horizonte; jene, welche mit der Oberfläche des Meeres zusammenfällt, Meeresniveau oder Meerespiegel und sie, die zugleich die wirklichen Grenzen des mathematischen Erdkörpers bezeichnet, dient auch unseren Höhenmessungen als Grundlage.

§. 2. Diese Wahl ist keine willkürliche, sondern wird bedingt durch die Form der Instrumente und die Art des Aufnehmens. Es läßt sich ganz wohl denken, daß eine andere, z. B. die BESSEL'sche Oberfläche vorzuziehen wäre, wenn die Höhenmessung nach Art trigonometrischer Nivellements nur von den astronomischen Stationen der Breitengradmessungen aus erfolgen könnte. Für geometrische Nivellements, auch für die trigonometrischen der Wirklichkeit, ist nur der oben definirte wahre Meerespiegel als Ausgangsfläche brauchbar, und wo sie sich ihr nicht hinreichend anschmiegen, müssen Correctionen eintreten. Von diesen werden wir reden nach kurzer Beschreibung der Messungsmethode bei geometrischen Nivellements.

Nivellirinstrumente bestehen nur aus zwei wesentlichen Theilen, dem Fernrohr und der Wasserwage oder Libelle. Die Flüssigkeit der letzteren tritt in's Gleichgewicht mit einer Oberfläche, welche horizontal, oder normal zum Erdloth ist, somit einen Theil des betreffenden Niveau's bildet; und eine Marke an der Libellenröhre, indem sie die Oberfläche symmetrisch theilt, zeigt an, daß auch die Visirlinie des Fernrohrs sich wagrecht oder tangential zum Erd-Niveau gestellt hat. In dieser Lage trifft die Visirlinie auf zwei lothrechte Ziellatten in gleichen Bogenabständen vom Instrument, jedoch nicht nothwendig in derselben Ebene, obwohl wir auch das hier annehmen wollen. Die Scaln der Latten sind gewöhnlich nach Metermaß getheilt und ihre Nullpunkte ruhen auf zwei Punkten des Terrains (der geographischen Erdoberfläche), deren Höhenunterschied wir kennen lernen wollen. Denken wir uns die Lattenlothe bis zum Meeresniveau hinab verlängert, so schneidet dieses unter den Fußpunkten der Latten Lothstücke ab, deren Differenz jenen Höhenunterschied ergibt. Dasjenige Niveau aber, welches die Visirlinie berührt, schneidet über den Lattenfußpunkten zwei Lothstücke ab, deren Differenz dann auch den gesuchten Höhenunterschied darstellt, wenn beide Niveaux concentrisch sind, d. h. wenn sich der untere und obere Niveaufchnitt von derselben Evolute abwickeln lassen. Aber auch unter dieser Voraussetzung

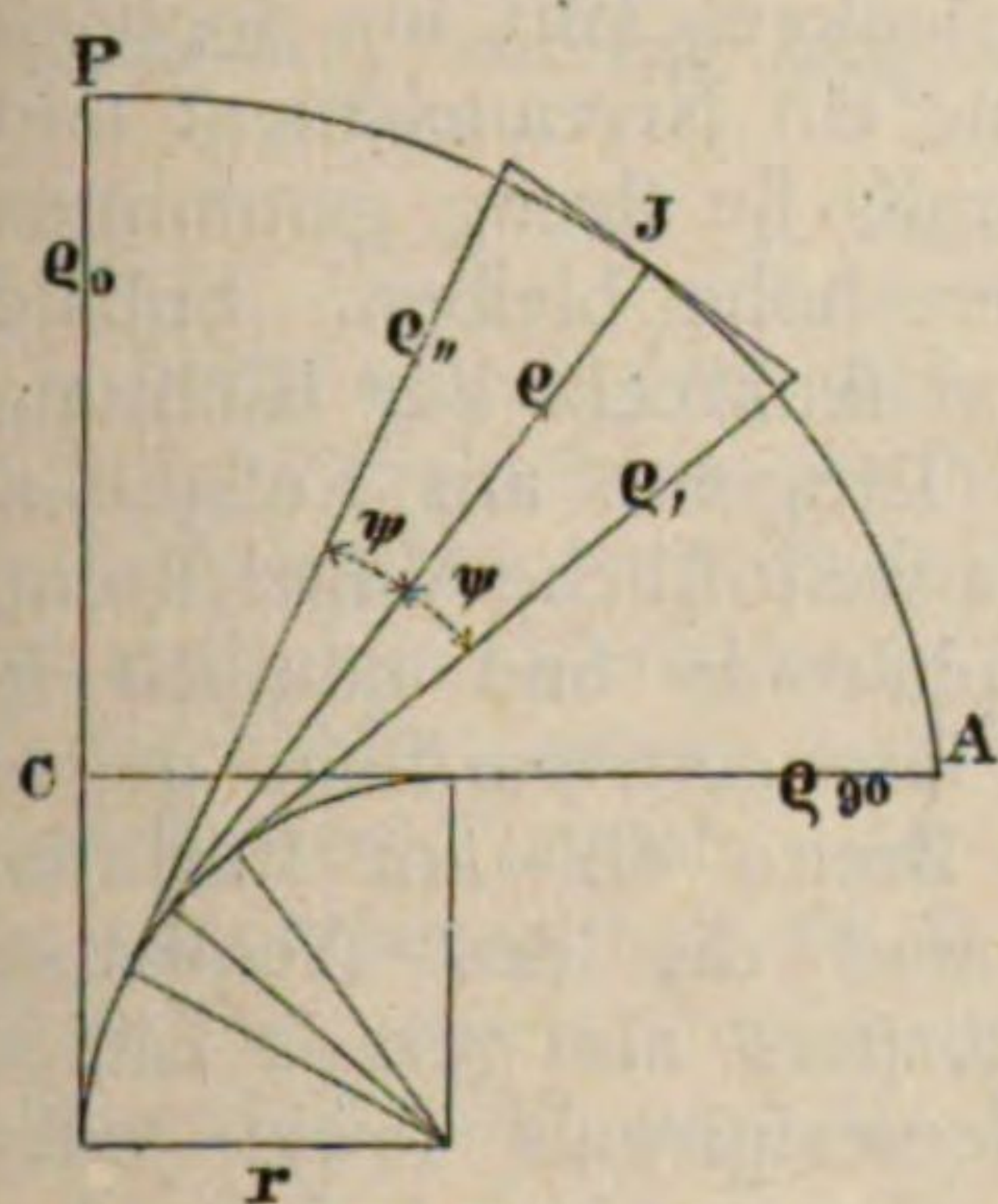
schneidet die Visirlinie, die Berührende des Niveau's, nur dann Stücke von gleichem Gröfsenverhältnifs ab, wenn entweder die Niveaucurve vom Berührungspunkt aus nach beiden Seiten symmetrisch verläuft oder die Entfernung der beiden Ziellatten, mit der Länge der Krümmungsradien an jener Curvenstelle verglichen, so gering ist, dafs man die Tangente mit der Curve zusammenfallend, oder als Curven-, respective Flächenelement betrachten kann. Andernfalls spricht sich der Fehler der Höhenmessung in der Differenz der beiden kleinen lothrechten Stücke aus, um welche sich die Visuren auf Zielweite (Lattenabstand) über dasjenige Niveau erheben, das sie berühren.

Den Höhenunterschied zweier weit entfernten Terrainpunkte messen wir durch Aneinanderreihen mehrerer Höhenmessungen der beschriebenen Art, sodafs bei jeder neuen Aufstellung des Instruments die eine der Ziellatten auf dem Punkte stehen bleibt, welcher auch bei der nächstvorhergehenden Operation als Zielpunkt diente. Aus den relativen Höhenunterschieden aller dieser Zwischen- oder Wechselfunkte setzt sich der Höhenunterschied des ersten und letzten Terrainpunktes zusammen; ebenso der Gesamtfehler aus den einzelnen, entsprungen aus dem Ersatz des Bogens durch die Berührende. Wir können den Fehler der Höhenmessung auch so auffassen, dafs um seinen Betrag sich die Linie oder Fläche, auf welche wir die gemessenen Höhen beziehen, von dem wahren Meeresniveau entferne. Aus dem Vorgehenden folgt, dafs diese Entfernung in zweierlei Weise entstehen kann: einmal wenn das Niveau des Fernrohrs nicht dem Meerespiegel concentrisch und dann, wenn die Visirlinie zwischen den Ziellatten nicht klein genug ist, um den Bogen vertreten zu können, sodafs bei ungleicher Krümmung im Rück- und Vorblick (Visur nach der hinteren und vorderen Latte) die Höhenmessung mittelst der Fernrohrvisirlinie von jener durch das Fernrohrniveau selbst ein wenig abweicht. Umgekehrt schliessen wir, dafs die Fläche, auf welche solche geometrische Nivellements ihre Höhenangaben beziehen, welche mit sehr kurzen Zielweiten entweder im Meerespiegel oder in concentrischen Niveaux ausgeführt werden, identisch ist mit der wahren mathematischen Erdoberfläche in Meereshöhe, welche Form immer diese auch haben mag, wenn sie nur continuirlich ist.

§. 3. Da wir uns aber von der Gröfse der Erdradien keine klare Vorstellung machen können gegenüber den Erdstrecken, welche unserer Uebersicht zugänglich sind, so könnte Manchem der Gedanke kommen, dafs die Berührende, auch bei kurzen Zielweiten, den Erdbogen nicht streng genug zu vertreten vermöge, um selbst auf dem mittleren Sphäroid, abgesehen von Lothstörungen, die Summirung kleiner Fehler auszuschliessen, beispielsweise wenn man auf dem Meridian nivellirt. Die Erde wölbt sich gegen den Aequator stärker, jede Tangente hebt sich in ihrer Mittagsrichtung mehr über das Niveau als mit einem gleichen Stück ihres zum Pol gerichteten Schenkels, und indem wir in Gedanken die Tangente mit dem Bogen iden-

tificiren, beziehen wir unfre Höhenunterschiede nicht mehr auf das Sphäroid, sondern auf eine Fläche, welche sich je nach Wahl der Zielweite bald mehr, bald weniger über die Aequatorgegend erhebt, oder wenn man will, unter die Pole senkt. Abstract betrachtet, werden je nach der einen oder anderen Vorstellungsweise, also je nach Wahl des Anfangspunktes, alle nicht im ersten Vertical nivellirten absoluten Höhen zu klein oder zu groß gefunden, am meisten im Meridian. Durch ein Gegennivellement in derselben Richtung und mit gleichen Zielweiten läßt sich die Differenz jedoch nicht erkennen, man findet für Anfangs- und Endpunkt denselben Höhenunterschied wie zuvor. In Wirklichkeit fällt der Betrag des Fehlers jedoch so klein aus, daß wir ihn vernachlässigen müssen. Ersetzen wir, um dies

Fig. 1.



zu erkennen, den Meridianschnitt des Erdsphäroidquadranten durch einen Quadranten der Kreisevolvente PA (Fig. 1) dessen äußere Normalen vom gemeinschaftlichen Schnittpunkt C (Erdcentrum) aus die Längen a und b der halben großen und kleinen Meridianachse erhalten und mit diesen auch der Richtung nach zusammenfallen, so gehört zu diesem Quadranten auch ein Quadrant des Evolutenkreises, dessen Radius

$$r = \frac{a-b}{2-\frac{\pi}{2}} = 2,33 (a-b) \text{ wird, während}$$

der Krümmungsradius e_0 am Pol gleich $b+r = 6405,77$ Kilometer wird, also um 7 Kilometer zu groß, und e_{90} unterm

Aequator gleich $a-r = 6327,70$ Kilometer, also um 7 Kilometer zu klein ausfällt als die entsprechenden BESSEL'schen Größen und demnach eine Art von Mittelwerth an die Stelle der e tritt, so zwar daß die Differenz $e-e_{90}$ der geogr. Breite proportional wächst. Heiße e der Krümmungsradius irgend eines Niveaupunktes J und $e,; e,,$ die Krümmungsradien zweier um den Winkel 206265ψ Secunden gegen Mittag und Pol gelegenen Niveaupunkte, $\chi,; \chi,,$ die Abstände letzterer von der Berührenden an J, in der Richtung der Lothe $e,$ und $e,,$ gemessen, so findet sich:

$$\chi, = e \frac{(1-\cos \psi)}{\cos \psi} + r \psi - r \operatorname{tg} \frac{\psi}{2} \frac{(1+\cos \psi)}{\cos \psi}$$

$$\chi,, = e \frac{(1-\cos \psi)}{\cos \psi} - r \psi + r \operatorname{tg} \frac{\psi}{2} \frac{(1+\cos \psi)}{\cos \psi}$$

und daraus durch Subtraction

$$(\chi, - \chi,,) = -2r (\operatorname{tg} \psi - \psi)$$

welches auch einen Mittelwerth repräsentirt und an allen Stellen des Meridianschnittes gleich groß ausfällt, sobald der kleine, im analytischen Maß ausgedrückte, Winkel ψ den gleichen Werth hat. Nun gilt für

den ganzen Meridianquadranten, wo der Fehler $\chi, - \chi''$ im Ganzen $\frac{\pi}{8\psi}$ mal vorkommt,

$$\Sigma_0^{\infty} (\chi, - \chi'') = - \frac{r\pi}{4} \left[\frac{2\psi^2}{3!} + \frac{16\psi^4}{5!} + \dots \right]$$

worin wir nur das erste Glied der Klammer zu berücksichtigen brauchen, welches uns lehrt, daß der vorstehende Ausdruck mit dem Quadrat der Zielweite wächst. Für die ganz abnorme Zielweite von 10'' wird er jedoch erst 0,0306^{mm}, wenn nach den BESSEL'schen Erddimensionen $r = 49697^m$ genommen wird. Eine solche GröÙe wird uns zwischen Pol und Aequator niemals nachweisbar sein, und auf ein ähnliches aber positives Resultat führt die Annahme gleicher Tangentenstücke statt der gleichen Winkel ψ .

§. 4. Nach Beseitigung des ersten Bedenkens tritt uns sogleich ein zweites entgegen. Wenn unsre Zielebene ein Niveauelement und zwar des Meerespiegels vertreten soll, so muß sie streng genommen stets in gleicher Höhe, ja sogar stets in Meereshöhe bleiben. Sobald sich die Libelle darüber erhebt, ist sie, wenn senkrecht zur Richtung des freien Falles, nicht mehr parallel der Tangente am Fußpunkt des betreffenden Lothes im Meerespiegel, die westöstliche Visirrichtung ausgenommen. Alle Lothe des Rotationssphäroids sind nämlich in der Meridianebene gelegene Curven, welche ihre convexe Seite gegen den Aequator kehren und nahe bei der Breite 45° am stärksten gebogen sind. Nur das Loth des Pols und die des Aequators lassen sich durch die ganze Tiefe des Erdkörpers als gerade Linien verfolgen. Die Krümmungsradien des Meerespiegels sowie jedes anderen Niveau's sind Tangenten an die Lothe, während sich aber diese erst im Mittelpunkt der Erde treffen, schneiden sich jene schon früher auf einer aus der Ellipsen-Evolute entstandenen Rotationsfläche, die Lothe des Meerespiegels auf der des sogenannten Erdkernes. Nur wenn die Lothe sich über dem Meer als Gerade fortsetzten, würde die Fläche des Erdkernes allen darüberliegenden Niveaux gemeinsam sein und diese überall gleichen Abstand von einander haben.

Die Ursache der Lothkrümmung ist dieselbe, welche überhaupt die sphäroidale Erdgestalt hervorgerufen hat, nämlich die Rotation der Erde. Sie setzt der Erdanziehung, deren Resultirende nach dem Schwerpunkt der Erde gerichtet ist, oder, wenn man die sphäroidische Gestalt auch dem ruhenden Erdkörper zuschreibt, in eine Richtung fällt, die zwischen der centralen und normalen des Ellipsoids liegt (f. E. SCHMIDT, *math. Geographie*, Göttingen 1829, I, p. 258), eine zweite Kraft in der Richtung der Parallelkreise entgegen, die Centrifugalkraft, welche, da allen Erdpunkten gleiche Winkelgeschwindigkeit zukommt, proportional dem Abstände von der Erdachse wächst. A. a. O. wird bewiesen, daß diese Kräfte sich erst dann in's Gleichgewicht setzen, wenn die flüssig gedachte Erdmasse, mag sie nun von gleicher Dichtigkeit sein oder aus Schichten von gegen aufsen ab-

nehmender Dichte bestehen, sich nach einem Ellipsoid abgrenzt, dessen Normalen die Richtung der Resultirenden bezeichnen. Um die Oberfläche höherer Schichten, als die Meere bilden, aufzufuchen, brauchen wir also nur die Existenz beliebiger neuer Flüssigkeiten über dem Wasser zu supponiren und dürfen dabei annehmen, daß die Flüssigkeit der Libelle stets mit der äußeren communicire. Um aber die Schwere nicht wesentlich zu ändern, darf die Masse der aufgetragenen Schichten gegen die Erdmasse nur verschwindend klein sein, ein Umstand, welcher unsere Vorstellung nur um so mehr der Wirklichkeit annähert. Unter diesen Voraussetzungen gilt für alle Erdniveaux das Theorem von CLAIRAUT (s. SCHMIDT I, 339); vermehrt man nämlich die Differenz $G_p - G_a$ der Schwere am Pol und Aequator irgend einer Schichte um das Product aus der Abplattung K derselben Schichte in die Schwere am Aequator, so verhält sich diese Summe zu der Centrifugalkraft γ unterm Aequator wie 5 zu 2. In Zeichen:

$$G_p - G_a + KG_a = \frac{5}{2} \gamma \quad (1)$$

Nun vermindert sich die Anziehung der Erde beim Aufsteigen in höhere Schichten von sehr geringer Masse nahe mit dem Quadrat des Abstandes vom Erdmittelpunkt, während die Centrifugalkraft nur im einfachen Verhältniß des Abstandes von der Erdachse wächst. Vernachlässigt man, um den Zuwachs der Schwere G zu finden, vorerst den Zuwachs der Centrifugalkraft, wozu man selbst unterm Aequator berechtigt ist, so findet man aus der Gleichung der Schwere für irgend einen Punkt im Abstand R vom Erdmittelpunkt und im Abstand $R - R_0$ von der Meeresfläche:

$$G = \frac{g_0 R_0^2}{R^2} - I$$

(worin g_0 die Anziehung an der Meeresfläche, I die Verticalcomponente der Centrifugalkraft ebenda bedeuten) durch Differenziren die folgende:

$$dG = - \frac{2g_0 R_0^2}{R^3} dR$$

welche in der Nähe der Meeresfläche, wo R sehr nahe gleich R_0 wird, in die folgende Differenzengleichung übergeht:

$$\Delta G = - 2g_0 \frac{\Delta R}{R_0}$$

Für die Oberflächenanziehung g_0 der Erde setzt man gewöhnlich die Schwere und erhält so

$$\Delta G = - 2G \frac{\Delta R}{R_0} \quad (2)$$

Daraus erkennt man, daß sich die Differenz $G_p - G_a$ für höhere Schichten nur wenig ändern wird und wir setzen sie der Kürze wegen constant. Die Aenderung der Abplattung

$$K = \frac{a - b}{a} \quad (3)$$

mit zunehmender Schichtenhöhe finden wir nun aus (1) und (3) wie folgt:

$$dK = \frac{bda - adb}{a^2} = \frac{5}{2} \frac{G \, dy - \gamma dG_a}{G_a^2} + \frac{G_p - G_a}{G_a^2} dG_a$$

und mit Rücksicht auf (2), worin wir $G = G_a$; $R_0 = a$ und $\triangle R = \triangle a$ setzen, indem wir sodann von den Differentialen auf Differenzen übergehen und ferner bedenken, daß

$$\frac{dy}{\gamma} = \frac{da}{a} \quad (4)$$

finden wir:

$$\triangle a - \triangle b = \left(K + \frac{15\gamma}{2G_a} - \frac{2(G_p - G_a)}{G_a} \right) \triangle a \quad (5)$$

Nun ist die Beschleunigung $G_a = 9780,6^{mm}$ und $G_a - G_p = 50,59^{mm}$; $\gamma = 33,9^{mm}$ und endlich $K = \frac{1}{299.15} = 0,0033428$ und man findet daraus

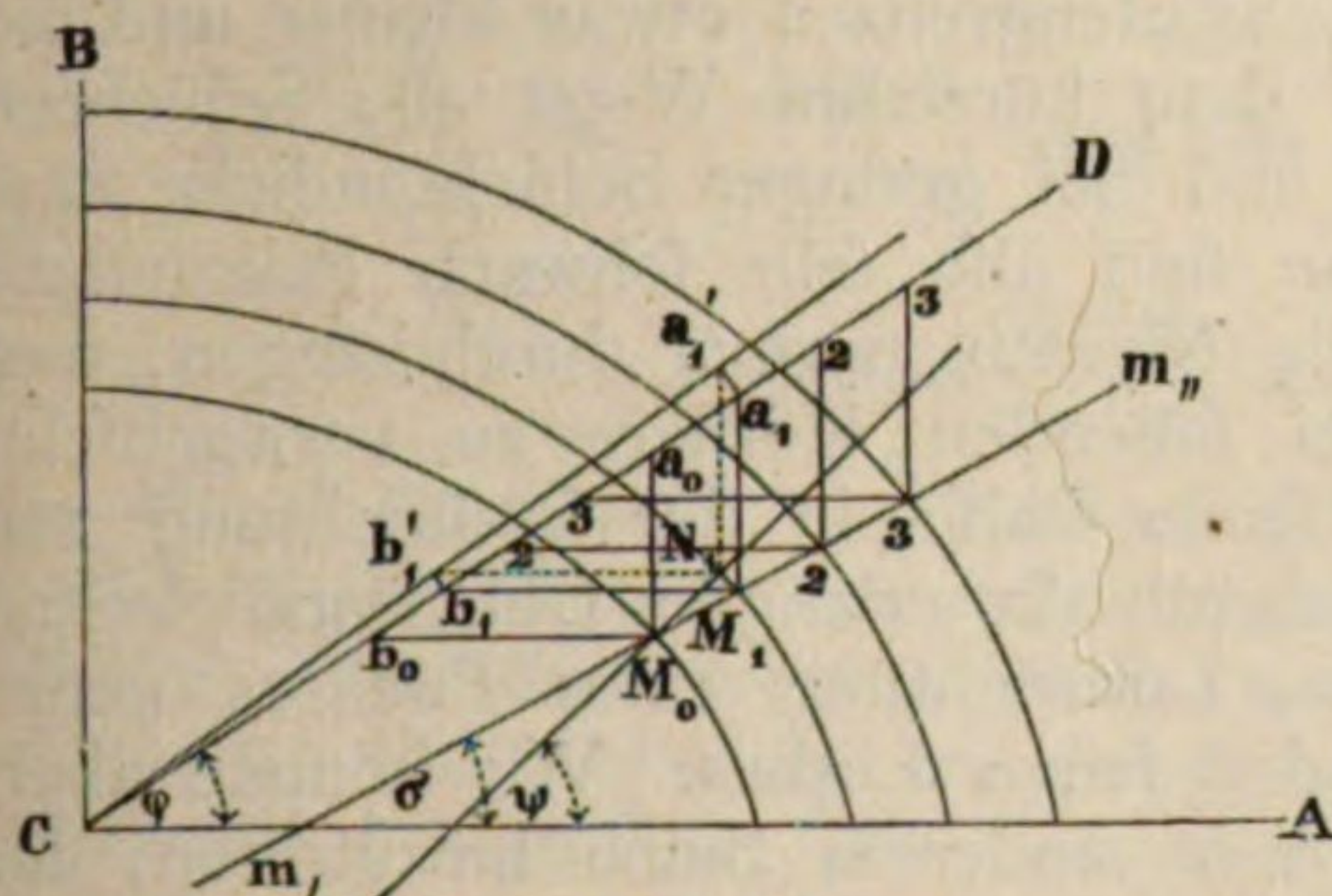
$$\triangle b = (1 - 0,0190) \triangle a = 0,9810 \triangle a \quad (6)$$

Nehmen wir beispielsweise $\triangle a = 1350^m$, die ungefähre Höhe unserer Alpentunnels (Maximalhöhe des Gotthardtunnels $= 1152,5^m$, des Mont-Cenistunnels $= 1334^m$, der Brennerbahn $= 1367^m$) so berechnet sich $\triangle b$ um $25,65^m$ kürzer, also um diesen Betrag wird sich das Niveau, welches am Aequator in der Höhe des Brennerpasses beginnt, bis zum Pol unter jene Fläche hinabsenken, welche dem Meerespiegel concentrisch gedacht wird. *) Wir müssen darum zwischen Punkten von gleichem Niveau und Punkten von gleicher absoluter Höhe unterscheiden. Da wir die letzteren messen wollen, unser Instrument, die Wasserwage, sich aber an ersteres anschließt, so sind wir zu einer Correction genöthigt, die wir berechnen wollen. Wir suchen zu diesem Zweck den Abstand zweier Niveaux an beliebigen Punkten der Erde

*) Man könnte auf den Gedanken kommen — und ähnliche Vorschläge sind schon gemacht worden — die Erhebungen der geographischen Erdoberfläche nicht mehr in Höhen, sondern nach Niveaux anzugeben, denen man etwa am Aequator gleiche Vertical-Abstände nach der Maßeinheit gäbe. Aber so wenig der Sterntag je die bürgerliche Zeiteintheilung bestimmen wird, so wenig wird das gemeine Leben und selbst die Geographie von der Vorstellung concentrischer Höhenschichten abgehen. Diese sind, gerade wie die mittlere Tageslänge, ein genau definirbarer Begriff und es genügt, daß die Wissenschaft die Definitionen scharf trennt. Welche Weitläufigkeiten würde es z. B. geben, wenn man gleiche Thurmhöhen in verschiedenen geogr. Breiten durch die Dicke der betreffenden Niveau-Schichten ausdrücken oder die Höhenkarten nach wahren Niveaufschnitten entwerfen wollte! Nebenbei bemerkt, enthalten die Ausdrücke: »äquidistante Niveau- oder Horizontalcurven« genau gleichviel innere Widersprüche und die Wahl zwischen ihnen ist Sache des Geschmacks, der vielleicht findet, daß das Wort Niveau den deutschen Flexionen nur schwer zugänglich ist.

aus ihrem Abstand am Aequator oder Pol, und den Correctionswinkel der geographischen Breite bei zunehmender Höhe zu ermitteln.

Fig. 2.



Denken wir uns in (Fig. 2) auf der Linie CD die Stücke $Cb_0 = b$, $Ca_0 = a$ abgetragen und von a_0 und b_0 aus 2 Reihen von Punkten in den Abständen Δa und Δb ausgehend, ferner von den Punkten der ersten Reihe Parallele mit der Y-Achse CB und von der zweiten Parallele mit der X-Achse CA gezogen, so geben die Durchschnitte von je zweien solcher zusammengehörigen Hilfslinien, z. B. $a_0 M_0$; $b_0 M_0$, Punkte, welche

Ellipsen von den Achsen a ; b ; dann $a + \Delta a$; $b + \Delta b$ u. f. w. angehören, deren Coordinaten (x, y) sich, wenn $\angle DCA = \varphi$, berechnen lassen aus:

$$\begin{aligned} x &= a \cos \varphi; & y &= b \sin \varphi \\ x, &= (a + \Delta a) \cos \varphi; & y, &= (b + \Delta b) \sin \varphi \\ && &\text{u. f. w.} \end{aligned}$$

Für jede andere Gröfse des Winkels φ entsteht eine neue Punktreihe M'_0 ; M'_1 derselben Ellipsen und jede solche Reihe liegt nothwendig auf einer Geraden, welche mit der X-Achse den veränderlichen Winkel σ einschließt. Für $\Delta a = \Delta b$ wird, der Construction zufolge, $\sigma = \varphi$, allgemein aber

$$\operatorname{tg} \sigma : \operatorname{tg} \varphi = \Delta b : \Delta a \quad (7)$$

Aus den Gleichungen für (x, y) ergibt sich

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b}{a} \cot \varphi$$

und wenn ψ der Winkel der Normalen mit der X-Achse ist,

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{a}{b} \operatorname{tg} \varphi \quad (8)$$

Wollen wir nun aus Δa , Δb und der geogr. Breite ψ das Stück $M_0 N_1$ der Normalen zwischen den beiden innersten Ellipsen berechnen, wobei wir annehmen dürfen, daß $\angle M_1 N_1 M_0 = 90^\circ$, so erhalten wir nach Berechnung von φ aus (7) der Construction zufolge:

$$M_0 M_1 = \frac{\Delta a \cos \varphi}{\cos \sigma}$$

und

$$M_0 N_1 = \frac{\cos \varphi \cos (\psi - \sigma)}{\cos \sigma} \Delta a \quad (9)$$

Nach dieser Gleichung und der $\Delta b = 0,9810 \Delta a$ (6) können wir den

Abstand zweier Niveaux für jede geogr. Breite aus ihrem Abstand am Aequator oder Pol berechnen. Freilich fällt er so etwas zu groß aus, denn schon N_1 gehört einer neuen Punktreihe an, von kürzeren Intervallen als die der M . Demnach wird, da auch $\psi - \sigma$ für $N_0; N_1 \dots$ wächst, der Abstand der beiden folgenden Schichtengrenzen etwas kleiner und die Linie, welche von M_0 aus auf dem kürzesten Wege alle Schichten durchdringt, eine gebrochene, und bei geringer Schichtendicke eine Curve, das Loth. Die Erdlothre sind also sehr schwach gekrümmte continuirliche Linien, welche alle Niveaux normal durchdringen, und nicht mit dem Weg eines frei fallenden Körpers zu verwechseln, der, obwohl in jedem Punkte seiner Bahn in der Lothrichtung von der Erde angezogen, doch eine durch die erlangten Geschwindigkeiten modificirte Richtung einschlägt. Lothrichtung eines Punktes nennt man die Richtung der Berührenden seines Lothes. Wir können aber, selbst wenn noch Lothbiegungen in anderem Sinne hinzutreten, für alle Messungen von Meerestiefen oder Berghöhen von ihrer Krümmung absehen und die Höhenmessung als auf einer Geraden erfolgt betrachten. Ebenso dürfen wir die Abstände jener Niveaux auch im Loth als gleich annehmen. Beides folgt aus der äußerst geringen Aenderung der geogr. Breite mit der Höhe, und diese Aenderung wollen wir jetzt suchen.

Da Winkel $N_1 M_1 a_1 = \psi$ ist, so erhält der Abstand der Parallelen $N_1 b'_1$ und $M b_1$ den Werth:

$$M_0 M_1 \sin(\psi - \sigma) \cos \psi = \frac{\cos \psi \cos \varphi \sin(\psi - \sigma)}{\cos \sigma} \cdot \Delta a.$$

Dieser Abstand, dividirt durch die kleine Achse $b + \Delta b$ der zweiten Ellipse gibt den Zuwachs von $\sin \varphi$, welcher nöthig ist die Punktreihe der $N_0; N_1 \dots$ zu erzeugen; wenn wir demnach die Schichtendicke gegenüber den Achsen hinreichend klein nehmen, so wird

$$d \sin \varphi = \cos \varphi d \varphi = \frac{\cos \varphi \cos \psi \sin(\psi - \sigma)}{\cos \sigma} \cdot \frac{da}{b}.$$

Aehnlich hätte man finden können:

$$d \cos \varphi = - \sin \varphi d \varphi = - \frac{\cos \varphi \sin \psi \sin(\psi - \sigma)}{\cos \sigma} \cdot \frac{da}{a}$$

und da außerdem aus (8) folgt:

$$d \psi = \frac{a}{b} \frac{\cos^2 \psi}{\cos^2 \varphi} d \varphi$$

so erhalten wir aus beiden vorstehenden Gleichungen, zu den Differenzen zurückkehrend:

$$\Delta \psi = \frac{\cos^2 \psi \sin \psi}{\cos \varphi \sin \varphi} \cdot \frac{\sin(\psi - \sigma)}{\cos \sigma} \cdot \frac{\Delta a}{b} \quad (10)$$

Der aus Winkelfunctionen zusammengesetzte Coefficient kann für

alle zugänglichen Höhen als constant gelten; dann ist $\Delta\psi$ der Niveauhöhe am Aequator proportional.

Drücken wir Δa durch die Niveauhöhe H in der Breite ψ aus, so wird nach (9)

$$\Delta a = \frac{\cos \sigma H}{\cos \varphi \cos (\psi - \sigma)}$$

und

$$\Delta \psi = \frac{\cos^3 \psi}{\cos^3 \varphi} \operatorname{tg} (\psi - \sigma) \frac{a H}{b^2} \quad (11)$$

$\Delta \psi$ ist also überhaupt der Meereshöhe H proportional.

Es ist der Winkel, um welchen jede auf dem Festlande gemessene Polhöhe vermindert werden muß, um sie auf den Meerespiegel zu reduciren. Ganz ähnlich werden durch ihn die Zenithdistanzen und Höhenwinkel beeinflusst, die letzteren nämlich um $\cos A \cdot \Delta \psi$ vermindert, wenn A das Azimuth mit dem Ausgangspunkt in der Richtung gegen Mittag ist. Aus (11) berechnet sich für Metermaß:

$$\psi = 45^\circ; \Delta \psi = \frac{17,695}{10^{10}} H; \Delta \psi = 0'',00036500 \text{ pro Meter}$$

$$\psi = 50^\circ; \Delta \psi = \frac{17,446}{10^{10}} H; \Delta \psi = 0'',00035986 \text{ pro Meter}$$

$$\psi = 55^\circ; \Delta \psi = \frac{16,664}{10^{10}} H; \Delta \psi = 0'',00034371 \text{ pro Meter.}$$

Wie man sieht, ändern sich diese Zahlen in unseren Breiten nicht so rasch, daß man sie nicht, namentlich in Rücksicht auf die Unsicherheit der Zahl $\frac{\Delta b}{\Delta a} = 0,981$, für Mitteleuropa als constant ansehen oder

wenigstens hinreichend scharf durch eine Gleichung vom 1. oder 2. Grade zwischen $\Delta \psi$ und ψ darstellen könnte. Während nun bei Polhöhebestimmungen so kleine Reductionen, die bei 1000^m Höhe erst $\frac{1}{3}$ Secunde erreichen, kaum in's Gewicht fallen, summiren sich dagegen die aus der Vernachlässigung entstehenden Fehler bei Höhenmessungen, sodafs bei Nivellements übers Gebirge und solchen, welche dasselbe umgehen, nicht genau das gleiche Resultat erscheinen wird. Ein Mittelgebirge wie der Taunus, von Osten nach Westen streichend, welches in der Richtung des Meridians 5 Meilen mißt und auf einem Paß von 300^m abf. Höhe überschritten, aber auch in Flussthälern (Lahn und Rhein) auf einer Höhe von 100^m abf. umgangen werden kann, wird schon eine merkliche Differenz ergeben. Nimmt man das Gebirgsnivellement in der mittleren Höhe von 200^m abf. erfolgt an, also 100^m über dem Thalweg, und setzt $100 \Delta \psi = 1745 : 10^{10}$, so wird ersteres, von Norden ausgehend, eine um

$$5 \times 7420 \times 1745 : 10^{10} = 0,006474^m$$

geringere Höhe für den südlichen Punkt ergeben, als das Nivellement längs dem Fluß, und dieses ist um die gleiche Gröfse von dem

Nivellement im idealen Meerespiegel verschieden. Es lassen sich Fälle denken, wo solche Beträge nicht mehr im Beobachtungsfehler verschwinden. Doch ist klar, daß die Differenz beider Nivellements keine andere wird, wenn die Aufnahme von Süden nach Norden erfolgte. Je nach Wahl des Ausgangspunktes wird sie positiv oder negativ, wie das bei Nivellement und Gegennivellement stets eintrifft.

Die Zunahme der Centrifugalkraft in größeren Höhen und die dadurch bewirkte Ablenkung der Lothrichtung erfordert also eine Correction der Nivellements, welche nahe bei 45^0 am stärksten wird, mit der Breite sich ändert und der Höhe proportional ist. Soll keine Verwirrung entstehen, so muß auch diese Correction auf den Meerespiegel als Ausgangsniveau gegründet werden; sie erfolgt am bequemsten nach der vorläufigen Cotenberechnung. Es reicht aus, wenn $\Delta\psi$ aus der mittleren abf. Höhe und der mittleren Breite zweier benachbarter, durch directes Nivellement verbundener Fixpunkte berechnet und in die Breitendifferenz, in Metern ausgedrückt, multiplicirt wird. Zur Bestimmung der letzteren genügt die Genauigkeit, welche eine gute Generalstabskarte gewährt. Daß eine (graphische) Tafel mit doppeltem Eingang für geogr. Breite und abf. Höhe gute Dienste leisten würde, bedarf keiner Ausführung. Die Geringfügigkeit der Correctionsgrößen läßt erwarten, daß sie auch dann der Wirklichkeit sehr nahe entsprechen, wenn die Dimensionen der idealen Erdform, worauf ihre Berechnung fußt, noch nicht mit großer Sicherheit erkannt wären.

Derfelbe Grund verhindert die Umkehrung der Aufgabe, Berechnung der Abplattung aus Nivellementdifferenzen.

§. 5. Die bisherigen Einwände gegen die Wahl der wahren Erdoberfläche als Basis der Höhenmessungen traten schon für den Fall auf, daß jene mit der Oberfläche eines Umdrehungsellipsoids identisch sei; da dies wegen ungleicher Massenvertheilung im Erdinnern und über dem Meerespiegel nicht zutrifft, so könnten noch einige Fragen von mehr oder weniger Berechtigung aufgestellt werden, z. B. ob die Erdniveaux lauter continuirliche, in sich selbst zurücklaufende Flächen sind, oder ob der Fall eintreten kann, daß eine senkrecht alle Schwererichtungen schneidende Fläche bei der Rückkehr zu ihrem ersten Normalschnitt sich etwa mit Schneckenwindungen übergreift, oder sich selbst durchdringend Spitzen und Kanten bildet. Man muß diese Frage von jener trennen, ob die Weltmeere in gleichem Niveau liegen. In ihnen herrscht, wie Wellen und Strömungen zur Genüge beweisen, kein Gleichgewicht im strengen Sinne der analytischen Mechanik. Temperaturdifferenzen des Wassers, Luftbewegungen, Ebbe und Fluth, Zuflüsse einerseits, dann Widerstände durch Cohäsion und Reibung andererseits machen es wohl möglich, daß selbst dauernde Höhenunterschiede getrennter Meeresflächen entstehen. Die idealen Niveaux aber, denen die Wasserwage folgt, sind Flächen von gleichem Druck, ihre Materien-Elemente keinen anderen Kräften unterworfen, als der Massenanziehung und der Centrifugalkraft, und reihen sich normal zu deren

Resultante aneinander. Die Bedingung des gleichen Druckes gestattet Discontinuität solcher Flächen nur dann, wenn sie sich asymptotisch den Richtungen einer der zusammenwirkenden Kräfte nähern; die Existenz von Spitzen oder Kanten im Niveau aber würde voraussetzen, daß die Resultirende der Kräfte für einen Punkt oder eine Punktreihe mindestens zwei Richtungen habe, weil an solchen Stellen die Fläche auf 2 oder mehr Richtungen normal stände.

Da also die Continuität der Niveaux gewiß ist, so könnte man darin wenigstens muldenförmige Einsenkungen vermuthen. Aber auch sie sind bei dem Ueberwiegen der gesammten Erdanziehung gegenüber Localattractionen zum mindesten sehr unwahrscheinlich, wenn man bedenkt, daß es, um die Erdnormalen an irgend einer Stelle einander nur parallel zu stellen, einer Zunahme der Lothstörung von 1" auf 31^m (Secundenlänge des Erdbogens) bedarf. Wohl aber verursachen locale Anziehungen der Berge und der stellenweise verdichteten Erdrinde sowohl wulstartige stärkere Wölbungen über, als auch Abplattungen unter der sphäroidalen Fläche: die Krümmungsradien der Erde schwanken innerhalb gewisser Grenzen, zwischen denen jene des Sphäroids etwa die Mitte halten. Bis jetzt sind weder Verlängerungen noch Kürzungen von mehr als ein Viertel der mittleren Radienlänge beobachtet worden, auch wenig Aussicht auf Entdeckung größerer Abnormitäten vorhanden.

Fragt man, wie geometrische Nivellements sich auf abgeplatteten oder wulstartigen Niveaufstellen gestalten, so dürfen wir uns vorstellen, sie erfolgten im einen Falle gleichsam auf Theilen eines Gestirnes von größeren, im anderen aber von kleineren Dimensionen als die Erdkugel sie aufweist, übrigens aber unter ganz gleichen Verhältnissen. Auf jenem wird sich die Visur der Fernrohrs noch mehr als hier dem Niveau anschmiegen, die Wechsel der Krümmung werden allmählicher erfolgen und die Erhebung der Visur über das Niveau vorwärts und rückwärts noch kleinere Unterschiede ergeben. Auf dem kleineren Gestirn findet das Gegentheil Statt und vorzugsweise hier sind schädliche Ungleichheiten im Rück- und Vorblick zu befürchten.

Unter den folgenden, verschiedenen Schriften entnommenen (Quellenangaben s. HUMBOLDT, *Kosmos* I. 423, ferner BÄYER, *Größe und Figur der Erde*, Berlin 1861, S. 34, dann sehr ausführliche bei POSCH, *Breitengradmessungen*, Freising 1860) Beobachtungen abnormer Lothdivergenzen finden sich leider nur wenige, welche einem Wulst im Niveaux entsprechen. Es sind hier die astronomisch bestimmten Amplituden a mit jenen α des mittleren Sphäroids (aus terrestrischer Messung) in Vergleich gesetzt, und um ihn anschaulicher zu machen, das Verhältniß der Krümmungsradien r des wirklichen und ρ des mittleren Erdbogens berechnet nach dem Satz, daß für flache Bögen von gleicher Länge die Radien sich umgekehrt wie die Centriwinkel verhalten. Demnach wird den Amplituden die Größe

$$V = \frac{r - \rho}{\rho} = \frac{\alpha - a}{a} \quad (12)$$

Nivellement im idealen Meerespiegel verschieden. Es lassen sich Fälle denken, wo solche Beträge nicht mehr im Beobachtungsfehler verschwinden. Doch ist klar, daß die Differenz beider Nivellements keine andere wird, wenn die Aufnahme von Süden nach Norden erfolgte. Je nach Wahl des Ausgangspunktes wird sie positiv oder negativ, wie das bei Nivellement und Gegennivellement stets eintritt.

Die Zunahme der Centrifugalkraft in größeren Höhen und die dadurch bewirkte Ablenkung der Lothrichtung erfordert also eine Correction der Nivellements, welche nahe bei 45^0 am stärksten wird, mit der Breite sich ändert und der Höhe proportional ist. Soll keine Verwirrung entstehen, so muß auch diese Correction auf den Meerespiegel als Ausgangsniveau gegründet werden; sie erfolgt am bequemsten nach der vorläufigen Cotenberechnung. Es reicht aus, wenn $\Delta\psi$ aus der mittleren abf. Höhe und der mittleren Breite zweier benachbarter, durch directes Nivellement verbundener Fixpunkte berechnet und in die Breitendifferenz, in Metern ausgedrückt, multiplicirt wird. Zur Bestimmung der letzteren genügt die Genauigkeit, welche eine gute Generalstabkarte gewährt. Daß eine (graphische) Tafel mit doppeltem Eingang für geogr. Breite und abf. Höhe gute Dienste leisten würde, bedarf keiner Ausführung. Die Geringfügigkeit der Correctionsgrößen läßt erwarten, daß sie auch dann der Wirklichkeit sehr nahe entsprechen, wenn die Dimensionen der idealen Erdform, worauf ihre Berechnung fußt, noch nicht mit großer Sicherheit erkannt wären.

Derselbe Grund verhindert die Umkehrung der Aufgabe, Berechnung der Abplattung aus Nivellementdifferenzen.

§. 5. Die bisherigen Einwände gegen die Wahl der wahren Erdoberfläche als Basis der Höhenmessungen traten schon für den Fall auf, daß jene mit der Oberfläche eines Umdrehungsellipsoids identisch sei; da dies wegen ungleicher Massenvertheilung im Erdinnern und über dem Meerespiegel nicht zutrifft, so könnten noch einige Fragen von mehr oder weniger Berechtigung aufgestellt werden, z. B. ob die Erdniveaux lauter continuirliche, in sich selbst zurücklaufende Flächen sind, oder ob der Fall eintreten kann, daß eine senkrecht alle Schwererichtungen schneidende Fläche bei der Rückkehr zu ihrem ersten Normalschnitt sich etwa mit Schneckenwindungen übergreift, oder sich selbst durchdringend Spitzen und Kanten bildet. Man muß diese Frage von jener trennen, ob die Weltmeere in gleichem Niveau liegen. In ihnen herrscht, wie Wellen und Strömungen zur Genüge beweisen, kein Gleichgewicht im strengen Sinne der analytischen Mechanik. Temperaturdifferenzen des Wassers, Luftbewegungen, Ebbe und Fluth, Zuflüsse einerseits, dann Widerstände durch Cohäsion und Reibung andererseits machen es wohl möglich, daß selbst dauernde Höhenunterschiede getrennter Meeresflächen entstehen. Die idealen Niveaux aber, denen die Wasserwage folgt, sind Flächen von gleichem Druck, ihre Materien-Elemente keinen anderen Kräften unterworfen, als der Massenanziehung und der Centrifugalkraft, und reihen sich normal zu deren

Resultante aneinander. Die Bedingung des gleichen Druckes gestattet Discontinuität solcher Flächen nur dann, wenn sie sich asymptotisch den Richtungen einer der zusammenwirkenden Kräfte nähern; die Existenz von Spitzen oder Kanten im Niveau aber würde voraussetzen, daß die Resultirende der Kräfte für einen Punkt oder eine Punktreihe mindestens zwei Richtungen habe, weil an solchen Stellen die Fläche auf 2 oder mehr Richtungen normal stände.

Da also die Continuität der Niveaux gewiß ist, so könnte man darin wenigstens muldenförmige Einsenkungen vermuthen. Aber auch sie sind bei dem Ueberwiegen der gesammten Erdanziehung gegenüber Localattractionen zum mindesten sehr unwahrscheinlich, wenn man bedenkt, daß es, um die Erdnormalen an irgend einer Stelle einander nur parallel zu stellen, einer Zunahme der Lothstörung von 1" auf 31^m (Secundenlänge des Erdbogens) bedarf. Wohl aber verursachen locale Anziehungen der Berge und der stellenweise verdichteten Erdrinde sowohl wulstartige stärkere Wölbungen über, als auch Abplattungen unter der sphäroidalen Fläche: die Krümmungsradien der Erde schwanken innerhalb gewisser Grenzen, zwischen denen jene des Sphäroids etwa die Mitte halten. Bis jetzt sind weder Verlängerungen noch Kürzungen von mehr als ein Viertel der mittleren Radienlänge beobachtet worden, auch wenig Aussicht auf Entdeckung größerer Abnormitäten vorhanden.

Fragt man, wie geometrische Nivellements sich auf abgeplatteten oder wulstartigen Niveaufstellen gestalten, so dürfen wir uns vorstellen, sie erfolgten im einen Falle gleichsam auf Theilen eines Gestirnes von größeren, im anderen aber von kleineren Dimensionen als die Erdkugel sie aufweist, übrigens aber unter ganz gleichen Verhältnissen. Auf jenem wird sich die Visur der Fernrohrs noch mehr als hier dem Niveau anschmiegen, die Wechsel der Krümmung werden allmählicher erfolgen und die Erhebung der Visur über das Niveau vorwärts und rückwärts noch kleinere Unterschiede ergeben. Auf dem kleineren Gestirn findet das Gegentheil Statt und vorzugsweise hier sind schädliche Ungleichheiten im Rück- und Vorblick zu befürchten.

Unter den folgenden, verschiedenen Schriften entnommenen (Quellenangaben s. HUMBOLDT, *Kosmos* I. 423, ferner BÄYER, *Größe und Figur der Erde*, Berlin 1861, S. 34, dann sehr ausführliche bei POSCH, *Breitengradmessungen*, Freising 1860) Beobachtungen abnormer Lothdivergenzen finden sich leider nur wenige, welche einem Wulst im Niveaux entsprechen. Es sind hier die astronomisch bestimmten Amplituden a mit jenen α des mittleren Sphäroids (aus terrestrischer Messung) in Vergleich gesetzt, und um ihn anschaulicher zu machen, das Verhältniß der Krümmungsradien r des wirklichen und ρ des mittleren Erdbogens berechnet nach dem Satz, daß für flache Bögen von gleicher Länge die Radien sich umgekehrt wie die Centriwinkel verhalten. Demnach wird den Amplituden die Größe

$$V = \frac{r - \rho}{\rho} = \frac{\alpha - a}{a} \quad (12)$$

beigefügt, welche für Abplattungen positiv, für Schwellungen negativ ausfällt. Diese Zahlen sind Mittelwerthe, und nur in seltenen Fällen auf der ganzen Länge α constant.

Zwischen Andrate und Mondovi in der oberen Po-Ebene fand sich, entsprechend der Lothablenkung durch die Alpen im Norden, die Apenninen im Süden:

$$\alpha = 1^{\circ} 8'; \quad \alpha - a = 48''; \quad +V = 1 : 85$$

Nicht weit östlich davon, zwischen Parma und Mailand, aber ganz in der Ebene, zeigte sich (abgerundet):

$$\alpha = 40'; \quad \alpha - a = 20''; \quad +V = 1 : 120$$

Geringer sind die Differenzen, welche die englisch-ostindische Gradmessung zwischen den 3 von Norden nach Süden folgenden Stationen Kaliana, Kalianpur und Damargida aufweist, für welche sich die geogr. Breiten $29^{\circ} 30' 48''$; $24^{\circ} 7' 11''$; $18^{\circ} 2' 15''$ fanden, sodafs für den nördlichen Theil des Meridianbogens:

$$\alpha = 5^{\circ} 23' 27''; \quad \alpha - a = 5'',3; \quad +V = 1 : 3661$$

resultirte und für den südlichen Theil:

$$\alpha = 6^{\circ} 4' 52'',2; \quad \alpha - a = -3'',8; \quad -V = 1 : 5762$$

Damit contrastirt die von MASKELYNE zur Bestimmung der mittleren Erddichte (1773) am Schehallien-Berge in Schottland ausgeführte Meridianmessung, welche ergab:

$$\alpha = 41''; \quad \alpha - a = -12''; \quad -V = 1 : 4,42$$

Man sieht, dafs diese Durchschnittszahlen V sehr schwanken und wäre versucht, bei einzelnen derselben auf Beobachtungsfehler jener Art zu schliessen, welche man persönliche nennt und die in der individuellen Eigenheit mancher Beobachter bestehen, beim Bifuriren der Sterne unbewusst regelmässige Schätzungsirrhümer zu begehen. So fand MECHAIN 1810 auf dem Meridianbogen Barcelona-Mont-Jouy von nahe 1 Bogenminute Länge auf astronomischem Wege die Abweichung von $3''$ oder $1 : 20$. Da man diese für unmöglich hielt, so suchte und fand ARAGO später die Erklärung dafür in persönlichen Fehlern des Auges, die mit der Objectivstellung wechselten. (*S. den Aufsatz über persönl. Gleichungen von RADAU, KARLS Repertorium für phys. Technik, 1. u. 2. Bd.*) Doch überzeugen wir uns, dass Werthe für V von $1 : 20$ und selbst grössere möglich, nicht einmal selten sind, wenn wir die Versuche des Obersten EDUARD PECHMANN (*die Abweichung der Lothlinie etc., Wien 1863/65 bei Gerold*) betrachten, welche dieser anstellte um nachzuweisen, dafs sich die Differenz zwischen astronomisch und geodätisch gemessenen Breitenwinkeln fast vollständig erklären lasse durch die Anziehung der über dem Meerespiegel hervorragenden Gebirgsmassen und dafs es dazu keiner Hypothesen über Vertheilung der Dichtigkeit unter der Erdoberfläche bedürfe. Für die von ihm behandelten Fälle scheint der Nachweis gelungen, wie namentlich die (I, pag. 42 u. 45) mitgetheilten Tabellen übersehen lassen. Zum

mindesten wird damit die Güte der Polhöhebeobachtungen dargethan und diese interessieren uns hier besonders deshalb, weil sie mit kurzen Intervallen gleichmäfsig über zwei Meridianbögen in breiten Längsthälern der Alpen vertheilt sind. Sie geben Gelegenheit, die Verhältniszahlen V für einzelne Punkte zu bestimmen, statt wie oben summarisch für ganze Bögen; ferner die Aufeinanderfolge der Radienlängen für Nachbarpunkte (sehr kleine Nachbarbögen) zu ermitteln und endlich für deren gemeinschaftliche Berührende die Differenz des Abstandes vom Niveau an Stellen, welche vom Tangentialpunkt gleich weit entfernt liegen. Es bedarf darüber einiger Erläuterungen, ehe wir PECHMANN's Beobachtungen mittheilen.

Seien die Längen eines Verticalschnittes der Erde durch den Secundenbogen des mittleren Sphäroids für die betreffende Erdstelle gemessen und h die entsprechenden Längenzahlen, w Secunden der Winkel, welchen die Berührenden oder die Normalen des Anfangspunktes und eines Punktes im Abstände h desselben Verticalschnittes mit einander bilden, so drückt $w = F(h)$ eine Zahlenfunction aus, deren Eigenschaften im Allgemeinen unbekannt sind und nur selten mit denen eines Bogens auf dem Sphäroid übereinstimmen werden. Nehmen wir sie gleichwohl als bekannt an, so drückt

$$\frac{dw}{dh} = F'(h) = \frac{\varrho}{r} \quad (13)$$

das Verhältnifs eines sehr kleinen Centriwinkels dw Secunden der wirklichen Niveaucurve zu dem Centriwinkel des Sphäroids für den kleinen Bogen dh Secunden aus, und umgekehrt wie diese Winkel verhalten sich die Radien ϱ des Sphäroids und r des wahren Erdbogens. Das oben (12) mit V bezeichnete Verhältnifs berechnet sich aus

$$V = \frac{1 - F'(h)}{F'(h)} \quad (14)$$

und zeigt die Verkürzung oder Verlängerung des sphäroidischen Krümmungsradius für jeden Punkt der Curve, wovon der Ueberblick halber die Maximal- und Minimalwerthe berechnet werden sollen. Nächstdem verlangen wir zu wissen die Veränderung eines Krümmungsradius des wahren Erdbogens gegenüber dem nächst vorhergehenden Nachbarradius, also das Verhältnifs $\Delta r : r$, welches die Abweichung der Erdcurve vom Kreis ausspricht. Durch Logarithmiren und Differenziren folgt aus (13)

$$\frac{dr}{r} = - \frac{d F'(h)}{F'(h)} = - \frac{F''(h) dh}{F'(h)}$$

oder, wenn wir zu mefsbaren Werthen übergehen:

$$\frac{\Delta r}{r} = - \frac{F''(h)}{F'(h)} \Delta h = - \frac{F''(h)}{r (F'(h))^2} \varrho \Delta h \quad (15)$$

worin Δh wie h nicht Längen, sondern Secundenzahlen bedeutet.

Auch von den Zahlen $\frac{\Delta r}{r}$ wird uns vornehmlich die grösst- und kleinstmögliche interessieren.

Ist $F'(h)$ constant, so wird $\frac{\Delta r}{r} = 0$; in diesem Falle ist das Nivellement mit gleichen Zielweiten, weil auf dem Kreis erfolgend, streng richtig. Für andre Fälle berechnen wir die Differenz $\Delta \chi$ der kurzen Abstände χ u. χ_1 , um welche die Endpunkte zweier gleicher, vom Curvenpunkte H aus rückwärts und vorwärts abgemessener Bogenstücke Δh sich von der gemeinsamen Berührenden in H entfernt haben. Ist h die Abscisse dieses Punktes und sei für ihn der Krümmungsradius r berechnet, der für das Stück Δh vor H constant sein soll, so ist $r + \frac{dr}{dh} \Delta h = r_1$ der constante Krümmungsradius für das Bogenstück Δh hinter H .

Die entsprechenden Centriwinkel in Secunden mögen Δw und Δw_1 heissen, und im analytischen Maass ausgedrückt werden sie gleich $\frac{\Delta h \varrho}{206265 r}$ und $\frac{\Delta h \varrho}{206265 r_1}$.

Eine sehr einfache Figur ergibt:

$$\chi = r \sin \Delta w \operatorname{tg} \frac{\Delta w}{2} = 2r \sin^2 \frac{\Delta w}{2}$$

$$\chi_1 = r_1 \sin \Delta w_1 \operatorname{tg} \frac{\Delta w_1}{2} = 2r_1 \sin^2 \frac{\Delta w_1}{2}$$

und sieht man bei Berechnung des Sinus von höheren Potenzen als der ersten ab, so folgt:

$$\chi_1 - \chi = \Delta \chi = \frac{1}{2} \frac{\Delta h^2 \varrho^2}{206265^2} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{2} \left(\frac{\Delta h}{206265} \right)^2 \frac{\varrho^2}{rr_1} \Delta r.$$

Setzt man darin, was nur für unmeßbar kleine Δh streng richtig, $\frac{\varrho}{r} = \frac{\varrho}{r_1} = F'(h)$, so wird

$$\Delta \chi = \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta h}{206265} \right)^2 \varrho F''(h) \Delta h. \quad (16)$$

Wenn demnach $F''(h)$ constant ist, so wächst $\Delta \chi$ mit der dritten Potenz der Zielweite Δh (Bogensecunden); für constante Zielweiten aber mit dem zweiten Differenzialquotienten der Niveaucurve.

§. 6. PECHMANN fand auf einem Meridianbogen bei Innsbruck, über welchen 4 Stationen $S_I - S_{IV}$ von Süden nach Norden vertheilt waren, folgende Amplituden h auf terrestrischem und w auf astronomischem Wege:

Amplitude	h	w	} (17)
$S_I \quad S_I$	0	0	
$S_{II} \quad S_I$	43,51	39,70	
$S_{III} \quad S_I$	81,92	72,34	
$S_{IV} \quad S_I$	114,47	99,09	

mit dem wahrscheinlichen Fehler $\pm 0'',215$ für jede Polhöhe und $0'',303$ für eine Amplitude.

Bei unsrer Ungewissheit über die allgemeinen Eigenschaften der Function $F(h)$, die wir nur als eine stetige kennen, wählen wir dafür, nach bekanntem Vorgang, die aus dem Taylor'schen Satz folgende Form

$$w = F(h) = Ah + Bh^2 + Ch^3 \quad (18)$$

und erhalten aus obigen Daten 3 Gleichungen, welche einzeln, sowie in ihrer Summe:

$$211,13 = 239,90 A + 21714 B + 2133170 C$$

erfüllt werden durch die Zahlenwerthe

$$A = + 0,9589$$

$$B = - 0,001223$$

$$C = + 0,0000036$$

welche uns den Erdbogen, soweit er der Beobachtung unterlag, also zwischen S_I und S_{IV} , näherungsweise ganz gut darstellen. Der erste Differenzialquotient

$$F'(h) = \frac{q}{r} = 0,9589 - 0,002446 h + 0,0000108 h^2$$

hat einen kleinsten Werth, die Zahl V demnach einen grössten bei $h = 113'',24$, noch innerhalb der beobachteten Curve, während wir als kleinsten Betrag des V den im Nullpunkt betrachten müssen.

$$V_{\max.} = \frac{0,17959}{0,82041} = \frac{1}{4,5682} = 0,21891$$

$$V_{\min.} = \frac{0,0411}{0,9589} = \frac{1}{23,331} = 0,042862$$

Die Grösse $\frac{\Delta r}{r}$ erreicht innerhalb $S_I \dots S_{IV}$ kein Maximum oder Minimum, bei $h = 113,24$ wird sie Null, bei $h = 0$ erhält sie den Werth

$$\frac{\Delta r}{r} = + \frac{0,002446}{0,9589} \Delta h = + \frac{\Delta h}{392,1} = 0,002557 \Delta h$$

Die beiden, schon weit ausser Bereich der Beobachtungen liegenden und darum wenig zuverlässigen Grenzwerte der Function heissen:

$$\text{für } h = - 162,37; \quad \frac{\Delta r}{r} = + \frac{\Delta h}{275,62} = + 0,0036282 \Delta h$$

$$\text{für } h = + 388,85; \quad \frac{\Delta r}{r} = - \frac{\Delta h}{275,62} = - 0,0036282 \Delta h$$

Man darf für Δh mehrere Bogensecunden nehmen, ehe diese immerhin nicht unbedeutenden Verhältnisszahlen von der Ordnung der oben gefundenen Zahlenwerthe V werden.

Zur Berechnung von Δx dient der aus BESSEL's Erddimensionen folgende Werth $\rho = 6369198$ Meter für die Breite $47^{\circ} 15' 42''$ und das Azimuth Null. Daraus:

$$\text{für } h = 0 ; \quad \Delta x = + 0,0001831 \Delta h^3 \text{ Millimeter}$$

$$\text{» } h = \begin{matrix} + 388,85 \\ - 162,37 \end{matrix} \quad \Delta x = \pm 0,0004456 \Delta h^3 \quad \text{»}$$

und erst für $F''(h) = 0,01336$ würde sich $\Delta x = 0,001 \Delta h^3$ Millimeter berechnen, worin, wie wir schon wissen, Δh die Secundenzahl der Zielweite z vorstellt, oder $\frac{z}{31}$, wenn z in Metern gegeben ist.

Auf einem zweiten Meridianbogen bei Klagenfurth mit 6 Stationen fand PECHMANN folgende Amplituden h und w , die hier, um große Zahlen zu vermeiden, alle von S_{IV} aus gezählt sind:

	h	w	
S, S_{IV}	— 63,00	— 60,55	} (19)
S'', S_{IV}	— 40,59	— 39,47	
S''', S_{IV}	— 19,98	— 20,14	
$S_{IV} S_{IV}$	0	0	
$S_{IV} S_V$	+ 20,26	+ 19,58	
$S_{IV} S_{VI}$	+ 40,74	+ 39,12	

mit dem wahrscheinlichen Fehler einer Polhöhe $\pm 0'',210$ und einer Amplitude $\pm 0'',296$. Diese Werthe lassen sich streng wiedergeben durch eine parabolische Function mit 5 Constanten, die auf Berechnung und Interpretation einer solchen verwandte Mühe ist aber kaum lohnender als das Auffuchen einer cubischen Gleichung wie die vorige, welche sich jenen Grössen mit der kleinsten Quadratsumme der Abweichungen anschliesst. Wir finden die Gleichung:

$$F(h) = \begin{matrix} + 0,98480 \\ \pm 0,00708 \end{matrix} h \begin{matrix} - 0,00022736 \\ \pm 0,00010114 \end{matrix} h^2 \begin{matrix} - 0,000009749 \\ \pm 0,000003155 \end{matrix} h^3$$

und für die wahrscheinliche Abweichung einer beobachteten Amplitude von dem Functionswerth: $\pm 0,2560''$ also weniger als der wahrscheinliche Beobachtungsfehler beträgt. Innerhalb der Beobachtungsstationen können wir demnach dem Erdbogen die in vorstehender Gleichung ausgesprochene Krümmung beilegen.

Der zweite Differenzialquotient wird Null bei $h = -7,774''$ und für diesen Punkt des Erdbogens berechnet sich der Minimalwerth von V :

$$V = \frac{1}{73,46} = 0,013613$$

während wir seine grössten Werthe an beiden Endstationen aufzufuchen haben, nämlich für

$$h = -63,00; \quad V = \frac{1}{8,743} = 0,11438 \text{ und für}$$

$$h = +40,74; \quad V = \frac{1}{11,154} = 0,089656$$

Das Verhältniß $\frac{\Delta r}{r}$ hat zwischen S , und S_{IV} keinen größten oder kleinsten Werth, wir müssen uns daher mit den Werthen auf den Grenzstationen begnügen, nämlich für

$$h = -63,00; \quad \frac{\Delta r}{r} = -\frac{\Delta h}{277,76} = -0,0036003 \Delta h$$

$$h = +40,74; \quad \frac{\Delta r}{r} = +\frac{\Delta h}{195,61} = +0,0030926 \Delta h$$

Aus dem Krümmungsradius $\rho = 6368488^m$ für die Breite $46^\circ 37' 32''$ in der Mitte des Bogens S , S_{VI} rechnet sich sodann für:

$$h = -63,00; \quad \Delta \chi = 0,0002418 \Delta h^3 \text{ Millimeter}$$

$$h = +40,74; \quad \Delta \chi = 0,0001165 \Delta h^3 \quad »$$

und $F''(h)$ müßte denselben Werth wie oben erreichen, nämlich 0,01336, wenn $\Delta \chi = 0,001 \Delta h^3$ erreichen sollte.

Um jedoch Haus zu halten mit dem spärlich vorhandenen Beobachtungsmaterial, wollen wir auch die strenge fünfgliedrige Gleichung kurz untersuchen. Sie lautet:

$$\begin{aligned} F(h) = & + 1,0044084259 h \\ & - 0,001306028317 h^2 \\ & - 0,00004850862936 h^3 \\ & + 0,0000006990783295 h^4 \\ & + 0,00000001534670785 h^5 \end{aligned}$$

- Für V erhält man zwei Maximal- und einen Minimalwerth, wozu wir noch die Werthe an den äußeren Stationen setzen, nämlich bei:

$$h = -63; \quad V = -\frac{1}{10,925} = -0,091538$$

$$h = -44,378; \quad V = +\frac{1}{7,8464} = +0,12745$$

$$h = -7,737; \quad V = -\frac{1}{68,179} = -0,014667$$

$$h = +24,784; \quad V = +\frac{1}{11,788} = +0,084830$$

$$h = +40,74; \quad V = -\frac{1}{18,565} = -0,053865$$

Der Bruch $\frac{\Delta r}{r}$ hat vier Maximalwerthe, wie aus der Auflösung einer Gleichung des 6. Grades folgt, welche, in ihre Factoren zerlegt, lautet:

$$(h - 11,403) (h + 29,903) (h - 71,795) (h + 89,338) \\ (h^2 + 18,6206 h + 5807) = 0$$

von denen der letzte, quadratische, imaginäre Wurzeln gibt. Obwohl zum Theil schon außer der Beobachtungslinie gelegen, führen wir doch alle 4 reellen Hauptwerthe an, dazu jene, welche auf S, und S_{VI} treffen:

h	$\frac{\Delta r}{r}$	$\frac{\Delta r}{\Delta h} \cdot \frac{1}{r}$
$- 89,338;$	$+\frac{\Delta h}{23,115}$	$+ 0,043261$
$- 63,00;$	$+\frac{\Delta h}{327,59}$	$+ 0,0030526$
$- 29,903;$	$-\frac{\Delta h}{174,36}$	$- 0,0057353$
$+ 11,403;$	$+\frac{\Delta h}{219,15}$	$+ 0,0045632$
$+ 40,74;$	$-\frac{\Delta h}{468,20}$	$- 0,0021359$
$+ 71,795;$	$-\frac{\Delta h}{23,555}$	$- 0,042453$

Für dieselben Bogenstellen berechnen sich folgende $\Delta \chi$, worunter jedoch keine Maximalwerthe im Sinne der Analysis vorkommen. Diese liegen bei $h = -29,088$ und $h = +10,867$ und sind nur wenig von jenen bei $-29,903$ und $+11,403$ verschieden.

h	$\frac{\Delta \chi}{\Delta h^3}$ (Millimeter)
$- 89,338$	$- 0,009618$
$- 63,00$	$- 0,002075$
$- 29,903$	$+ 0,000403$
$+ 11,403$	$- 0,000328$
$+ 40,74$	$+ 0,001512$
$+ 71,795$	$+ 0,009978$

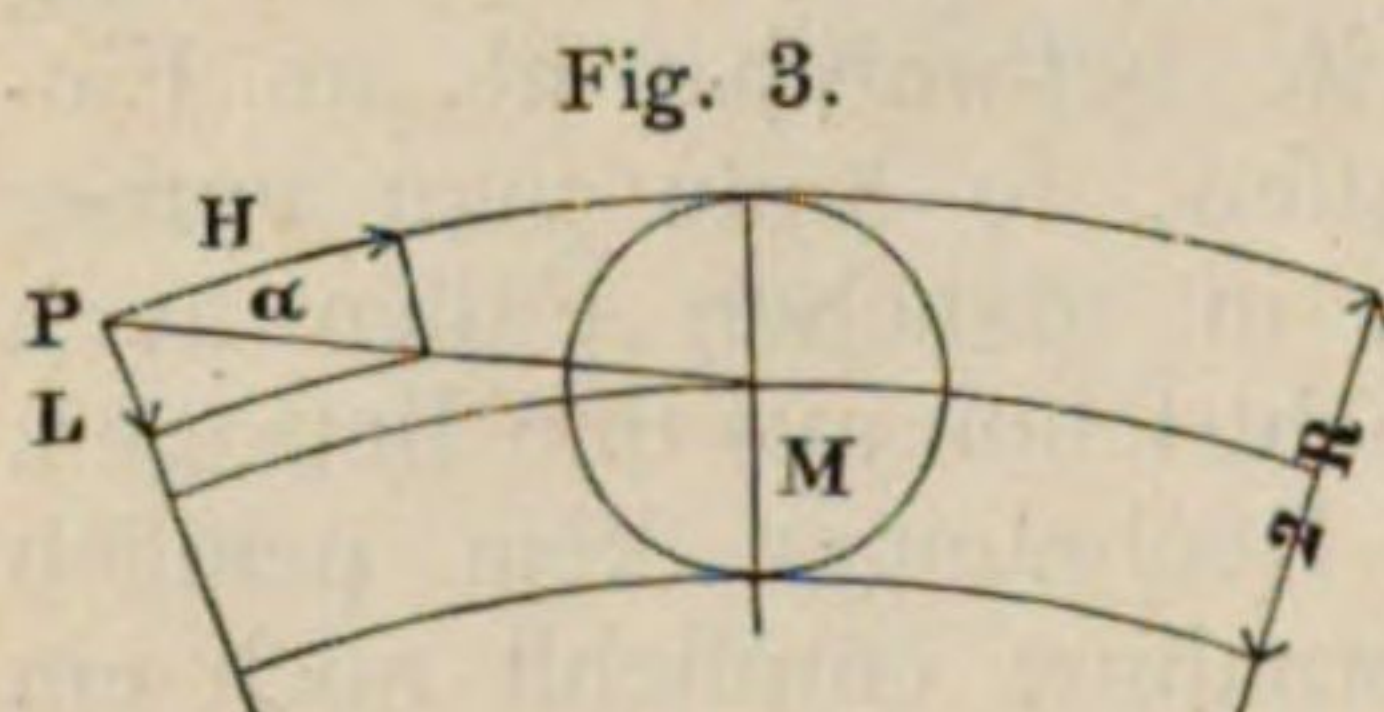
Sieht man von den beiden äußeren unverbürgten Werthen ab, so wird von allen bisher berechneten Differenzen $\Delta \chi$ die Zahl $0,0025 \Delta h^3$ nicht überschritten und obwohl man nach nur 2 Versuchsorten, allerdings von ausgeprägter Lage, nicht die gesammten Alpen beurtheilen darf, so sieht man doch soviel, daß Werthe von $\Delta \chi = 0,01 \Delta h^3$ schon zu den Ausnahmen gehören. Während also bei Zielweiten von nur 2 Secunden ($\Delta h = 2$) der Irrthum im Niveau nie $0,08^{\text{mm}}$ erreicht, kann er in Ausnahmefällen bei 3 und mehr Bogensecunden Zielweite schon beträchtlich genug anwachsen um auch im einzelnen Stand fühlbar zu werden. Schlimmsten Falles aber gehört $\Delta \chi$ zu den Fehlern, welche sich nie lange in demselben Sinne

summiren können, da in bergigen Gegenden der zweite Differenzialquotient des Erdbogens häufig sein Vorzeichen ändert. Außerdem kann $\Delta \chi$ alle Werthe zwischen Null und $\pm 0,01 \Delta h^3$ durchlaufen, wir sind demnach berechtigt, sein Anwachsen proportional der Wurzel aus der Anzahl Instrumentenstände anzunehmen und umsomehr, wenn diese groß ist. Für 10000 Stände fiele dann die größtmögliche Abirrung vom Niveau $= \Delta h^3$ Millimeter aus, für Zielweiten von 3'' auf 1000 Erdbogenminuten oder 250 geogr. Meilen also höchstens 27^{mm}. Sollte jedoch der Weg des Nivellements und die Massenvertheilung eines Gebirges, welche stets schätzungsweise bestimmbar ist, im Einzelnen größere Niveaufehler befürchten lassen, so kann man immer durch Verkürzen der Zielweiten abhelfen, in manchen Fällen auch durch Berechnung von Reductionen. Man sieht schon aus den Beträgen, um welche es sich handelt, daß solche Rechnungen kein peinlich strenges Verfahren erfordern und ihre Vornahme empfiehlt noch ein zweiter Umstand:

§. 7. Denken wir uns einmal die Zielweiten klein genug, sodaß jeder gemessene Höhenunterschied sich genau auf das von der Visirtangirte Niveau bezieht; denken wir uns ferner daran die Correction wegen ungleicher Niveau-Abplattung angebracht; so sind wir doch noch nicht versichert, ob die gefundenen Höhen sich auf den Meerespiegel beziehen. Denn haben wir die Erdlothe bisher als Curven in der Meridianebene betrachtet und ihre Biegung (für kurze, nahe parabolische Stücke) berechnet, so dürfen wir jetzt nicht mehr übersehen, daß jene Lothe in Folge unregelmäßiger Massenvertheilung an der Erdoberfläche Curven von doppelter Biegung sein können und daß ebenso jene berechnete Krümmung um ein Beträchtliches von der wirklichen abweichen kann. Offenbar wirkt die Attraction eines Berges nicht in jeder Höhe gleich stark auf die Lothrichtung, ein nach Westen abgelenktes Loth wird über dem Gebirge wieder zur Meridianrichtung zurückkehren u. s. w. Es fragt sich, ob solche Lothkrümmungen nicht ausreichen, um mit dem Uebergang auf den Gebirgsweg auch den auf ein ganz anderes Niveau als den Meerespiegel, auf ein imaginäres Niveau zu bewirken, welches obendrein aus allen durchschrittenen Schichten zusammengesetzt wird, dessen Reduction auf das Meer sich also nicht ohne Weiteres aus einer einzigen Formel ableiten läßt.

Zur Illustration des Gefagten wollen wir einen Fall behandeln, der, wenn er auch auf der ganzen Erdoberfläche nicht vorkommt, doch in seiner Wirkung mehrere Fälle der Natur einschließt. Denken wir, aus einer Hochfläche von der absoluten Höhe R rage eine Halbkugel von gleicher Höhe und von gleichmäßiger Dichtigkeit hervor, nach unten aber ergänze sie sich zur Kugel mit einer Dichtigkeit, welche der Summe aus der Erdrindendichte und jener der vortretenden Hälfte gleichkommt. Materielle Punkte außerhalb der Kugel werden nun nach deren Mittelpunkt so angezogen, als ob dort die

ganze Masse einer Kugel von gleichem Radius und der Dichtigkeit der oberen Hälfte vereinigt wäre. Von der Erde aber werden solche Punkte ausserdem angezogen mit der Intensität und nach der Richtung der Resultante aus Schwere und Schwerkraft. Wir sehen dabei ab von Verminderung der Schwere mit der Höhe und dem Einfluss der Masse unter der Hochfläche auf Vermehrung der Erdschwere in grösseren Höhen und Verminderung zwischen ihr und dem Meerespiegel, lauter kleinen Beträgen.



Ist S (Fig. 3) die Schwere im Punkte P, welcher, wenn k die Anziehung an der Kugeloberfläche bedeutet und $E = PM$ den Abstand von deren Mittelpunkt, nach diesem mit der Intensität $J = \frac{kR^2}{E^2}$ hingezogen wird, so zer-

legen wir diese in die Vertical- und Horizontalcomponenten

$$L = J \sin \alpha \quad \text{und} \quad H = J \cos \alpha$$

wo α den Neigungswinkel der Linie PM gegen das Niveau des Sphäroids in P vorstellt. Sei m die Höhenlage des Punktes P über M und h der Horizontalabstand beider Punkte im Meerespiegel, beide ausgedrückt wie auch die Grösse R in Secundenbogen des Sphäroids, so wird die Schwere in P vermehrt um

$$L = \frac{mkR^2}{(m^2 + h^2)^{3/2}}$$

dagegen ihre Richtung verändert um den (sehr kleinen) Winkel A , dessen Tangente wird:

$$\operatorname{tg} A = \frac{H}{S + L} = \frac{hkR^2}{(m^2 + h^2)^{3/2} S + mkR^2} \quad (20)$$

wobei wir auch die Niveaubiegung bei Berechnung von E vernachlässigten. Sei $\sigma = \frac{k}{S}$ und Δh eine sehr kleine Horizontalstrecke, so wird sich das gestörte Niveau von P aus über das des Sphäroids erheben um $\Delta h \operatorname{tg} A$ und auf grössere Strecken allgemein um

$$\int \operatorname{tg} A \, dh = \sigma R^2 \int \frac{h \, dh}{(m^2 + h^2)^{3/2} + \sigma R^2 m} \quad (21)$$

Dieses Integral dürfen wir nur zwischen Grenzen nehmen, für welche das betrachtete Niveaustück von der Höhenlage m (in Bezug auf M) noch ausserhalb der Kugel liegt. Erst für $m > \pm R$ sind die Grenzen willkürlich. Entwickeln wir den Bruch, welcher h enthält, in eine Reihe und behalten der starken Convergenz wegen nur deren erste Glieder bei, so wird

$$\int_{h_1}^{h_2} \text{tg } A \, dh = -\sigma R^2 \int_{h_1}^{h_2} \frac{-h dh}{(m^2 + h^2)^{3/2}} + m\sigma^2 R^4 \int_{h_1}^{h_2} \frac{-(m^2 + h^2) h dh}{(m^2 + h^2)^4}$$

$$= \frac{\sigma R^2}{\sqrt{m^2 + h_1^2}} - \frac{\sigma R^2}{\sqrt{m^2 + h_2^2}} - \frac{m\sigma^2 R^4}{4(m^2 + h_1^2)^2} + \frac{m\sigma^2 R^4}{4(m^2 + h_2^2)^2} \quad (22)$$

Vergleichen wir das Niveau, welches die Kugel oben tangirt und jenes, welches ihren Mittelpunkt trifft, mit dem Meerespiegel, auf welchem sie ruht, so wird zwischen den Grenzen $h_2 = h$ und $h_1 = R$ die Erhebung der 3 Niveaux über das sphäroidische der Reihe nach

$$\text{für } m = +R : \left[\frac{\sigma R}{\sqrt{2}} - \frac{\sigma^2 R}{16} \right] - \left[\frac{\sigma R^2}{\sqrt{R^2 + h^2}} - \frac{\sigma^2 R^5}{4(R^2 + h^2)^2} \right]$$

$$m = 0 : \quad \sigma R - \frac{\sigma R^2}{h}$$

$$m = -R : \left[\frac{\sigma R}{\sqrt{2}} + \frac{\sigma^2 R}{16} \right] - \left[\frac{\sigma R^2}{\sqrt{R^2 + h^2}} + \frac{\sigma^2 R^5}{4(R^2 + h^2)^2} \right]$$

Um die Abweichungen vom Meerespiegel zu berechnen bilden wir die Differenzen ϑ durch Abziehen der beiden oberen Werthe vom unteren wie folgt:

$$\vartheta_{(m = +R)} = \frac{\sigma^2 R}{8} - \frac{\sigma^2 R^5}{2(R^2 + h^2)^2} \text{ und}$$

$$\vartheta_{(m = 0)} = \frac{\sigma R}{2} (\sqrt{2} - 2) + \frac{\sigma^2 R}{16} + \frac{\sigma R^2}{h} - \frac{\sigma R^2}{\sqrt{R^2 + h^2}} - \frac{\sigma^2 R^5}{4(R^2 + h^2)^2}$$

Nehmen wir $h = \infty$, $R = 120''$ (eine halbe Meile oder 3710^m) und die Dichtigkeit der oberen Kugelhälfte gleich der Rindendichte der Erde, so können wir die Oberflächenanziehung k und S den Radien und den (mittleren) Dichtigkeiten proportional setzen, wobei wir das Verhältniß der letzteren nach den älteren, ungünstigeren Angaben wie 2,5 : 4,85 wählen (gegen 2,5 : 5,5 nach Drehwagenmessungen von CAVENDISH, BAILY und REICH). Man findet danach:

$$\sigma = \frac{120}{206265} \times \frac{2,5}{4,85} = 0,0003 = \frac{1}{3333}$$

Durch Einsetzen der für h und σ angenommenen Werthe wird

$$\vartheta_{(m = +R)} = 0,00000135'' = 0,042^{\text{mm}}$$

$$\vartheta_{(m = 0)} = 0,000000675'' - 0,0105441'' = -3269^{\text{mm}}$$

Auf der Hochfläche ($m = 0$) vorschreitend, hätte sich demnach das Nivellement bis zum Fusse des Berges um fast $\frac{1}{3}$ Meter von dem Meerespiegel abgebogen und würde sich allerdings auf der anderen Bergseite wieder ganz in demselben Masse dem Meeresniveau nähern. Ein Nivellement in Gipfelhöhe würde dagegen vom Meerespiegel fast gar nicht abgewichen sein. In der Wirklichkeit liegen die Umstände insofern ungünstiger, als die Symmetrie der Lothstörung beim Ein-

und Austritt aus Gebirgen nie so regelmässig ist, aber infofern weit besser, als Fälle von Lothstörungen bis zu 1 Minute, wie hier am Fusse der Halbkugel ($206265\sigma = 61'',88$) kaum je vorkommen werden, (obwohl, wie oben angeführt, die Summe zweier Lothstörungen südlich der Alpen soviel beträgt) und als die Nivellements sich etwa nur zur halben hier angenommenen Höhe erheben werden, wo die Lothstörungen im Meerespiegel weit mehr mit jenen auf der Erdoberfläche übereinstimmen.

§. 8. Noch ist es von einigem Interesse, das gewählte Beispiel auch bezüglich jenes Fehlers zu prüfen, den wir $\Delta \chi$ nannten und welcher vom zweiten Differenzialquotienten der Funktion

$$F(h) = h + \frac{h\sigma R^2 206265}{(m^2 + h^2)^{3/2} + m\sigma R^2} \quad (23)$$

abhängt, worin der für $\text{tg } A = A \text{ tg } 1''$ gefundene Werth aus (20) eingeführt ist. Man findet:

$$F''(h) = \frac{3 \times 206265 \sigma R^2 \cdot [-3hm^2[(m^2 + h^2)^{3/2} + m\sigma R^2] + 2h^3[(m^2 + h^2)^{3/2} - 2m\sigma R^2]]}{[(m^2 + h^2)^{3/2} + m\sigma R^2]^3 \sqrt{m^2 + h^2}} \quad (24)$$

und, wenn B den in Bruchform geschriebenen und von h abhängigen Factor bedeutet, nach (16)

$$\Delta \chi = \frac{3}{2} \frac{\Delta h^3 \sigma R^2}{206265} \varrho B \quad (25)$$

Wollen wir $\Delta \chi$ in Secundenbogen erhalten, so wird $\varrho = 206265$ und man hat

$$\Delta \chi = \frac{3}{2} \Delta h^3 \sigma R^2 B$$

und in Metern, nach einer Durchschnittsrechnung

$$\Delta \chi = \frac{3}{2} \Delta h^3 \sigma R^2 B \times 31$$

Für die 3 betrachteten Niveaufschnitte wird B der Reihe nach:

$$B_{(m=0)} = \frac{2}{h^4}$$

$$B_{(m=\pm R)} = \frac{-3hR^2[(R^2 + h^2)^{3/2} \pm R^3\sigma] + 2h^3[(R^2 + h^2)^{3/2} \mp 2R^3\sigma]}{[(R^2 + h^2)^{3/2} \pm R^3\sigma]^3 \sqrt{R^2 + h^2}}$$

Diese beiden Werthe berechnen sich für $h = R$ zu $+\frac{2}{R^4}$ und

zu $-\frac{1}{R^4} \frac{\sqrt{8} \pm 7\sigma}{(\sqrt{8} \pm \sigma)^3 \sqrt{2}}$; Grenzwerte von $F''(h)$ liegen jedoch

nahe bei $h = 1,69^m$ und $h = 0,36^m$ und wir wollen für die äusseren Niveaufschnitte auch diese berechnen; für das mittlere Niveau ist

$F''(h = R)$ der Maximalwerth, weil, unter Voraussetzung gleichmässiger Dichte, die Anziehung innerhalb der Kugel wie der Abstand von deren Mittelpunkt abnimmt. Wir bekommen folgende Grenzwerte, die für das Niveau des Berggipfels mit I, für das des Fusses mit II und für das Meeresniveau mit III bezeichnet sind:

für	$h = 1,69R:$	$h = 0,36R:$
	$I = + 0,04069 \times \frac{1}{R^4}$	$I = - 0,64480 \frac{1}{R^4}$
	$III = + 0,04073 \times \frac{1}{R^4}$	$III = - 0,64437 \frac{1}{R^4}$
und für	$h = R:$	$II = + 2 \times \frac{1}{R^4}$

Vereinigt man die sehr wenig verschiedenen Werthe I und III zu einem Mittel, so sind die grössten Beträge von $\Delta \chi$ in den äusseren Niveaufschnitten, in Millimetern,

$$\Delta \chi = - \frac{29974\sigma}{R^2} \Delta h^3 = - 0,0006245 \Delta h^3$$

und im mittleren:

$$\Delta \chi = + \frac{93000\sigma}{R^2} \Delta h^3 = + 0,001938 \Delta h^3$$

also von der Grösse derjenigen, welche sich innerhalb der PECHMANN'schen Meridianstücke berechneten. Die von uns angenommene Grenze

$$\Delta \chi = 0,01 \Delta h^3 \text{ Millimeter}$$

wird also selbst bei so enormen Lothstörungen wie die hier supponirte, von der Natur bei weitem nicht erreicht und man dürfte sich deshalb und aus dem früher angeführten Grunde des Zeichenwechsels (der auch in unserem Beispiele auftritt) mit der Abweichung $\Delta \chi$ vom benützten Niveau nicht streng zu beschäftigen haben. Dagegen kann eine approximative Berechnung der Abbiegung des benützten Niveau's vom Meerespiegel unter Umständen von Nutzen sein und vor grösseren Fehlern bewahren, wenn auch die Rechnungsformeln nicht ganz so einfach wie oben ausfallen, selbst unter der (genügenden) Annahme gleichmässiger Dichte in der Nähe der Erdoberfläche. Es braucht kaum erwähnt zu werden, dass diese Correction ganz unabhängig von jener berechnet werden kann, welche aus der Variation der Abplattung mit der Höhe entspringt.

§. 9. Noch eine letzte Frage soll unser Beispiel beantworten, nämlich wie gross der Radius R der Kugel und wie gross ihre Dichtigkeit gewählt werden muss, um an der Stelle des stärksten Wachstums der Lothstörung Parallelismus der Erdloth zu bewirken. Wir haben schon erwähnt, dass dann die Abnahme der Lothstörung und das Wachsthum der Entfernung auf dem Sphäroidbogen (oder umgekehrt) von dem Störungsmittelpunkt aus, beide im analytischen

Winkelmafs ausgedrückt, einander gleich sein müssen. Nach (20) find, solange wir Tangente und Bogen vertauschen dürfen, die Lothstörungen im Niveau des Kugelmittelpunktes M ausgedrückt durch

$$A = \frac{R^2}{h^2} \sigma \quad (26)$$

woraus folgt

$$dA = -\frac{2R^2}{h^3} \sigma dh \quad (27)$$

Wenn d und D die mittleren Dichtigkeiten der oberen Hälfte der Kugel und der Erde bedeuten und $\varrho = 206265$ gesetzt wird, so ist, wie oben erläutert

$$\sigma = \frac{R}{\varrho} \cdot \frac{d}{D} \quad (28)$$

In Rücksicht hierauf und auf (27) spricht sich die Bedingung des Parallelismus der Erdlothe im fraglichen Niveau aus durch die Gleichung:

$$\frac{dh}{\varrho} - \frac{2R^3}{h^3} \cdot \frac{d}{D} \cdot \frac{dh}{\varrho} = 0$$

worin $\frac{dh}{\varrho}$ den Zuwachs des sphäroidischen Centriwinkels bedeutet und woraus für die Stelle der stärksten Aenderung der Lothstörung, nämlich für die Kugeloberfläche, wo $h = R$ ist, folgt:

$$d = \frac{1}{2} D$$

Dasselbe Resultat ergibt sich, wenn man aus Gleichung (23) den ersten Differenzialquotienten $F'(h)$ bildet und gleich Null setzt, dabei σ durch den vorstehenden Werth (28) ersetzt. Es zeigt sich also, daß eine Einsenkung der mathematischen Erdoberfläche in unserem fingirten Beispiele dann eintritt, wenn die Dichtigkeit der oberen Kugelhälfte mehr als die Hälfte der mittleren Erddichte beträgt, unabhängig von dem Radienverhältniß. Bedenkt man aber, welchen Ausnahmefall die hier angenommene untere Kugelhälfte mit nahezu mittlerer Erddichte repräsentirt, so erscheint das Auftreten von Niveau-Mulden fast unmöglich. *)

§. 10. Im Vorgehenden betrachteten wir jene Hindernisse, welche sich der Wahl des Meerespiegels als Ausgangsfläche für alle Höhenbestimmungen dauernd entgegenstellen und sich ihrer Unveränderlichkeit und geringen Einflüsse wegen theils durch Rechnung beseitigen,

*) Uebereinstimmend damit gibt Gleichung (18) nach Einführung der aus PECHMANN's Beobachtungen berechneten Coefficienten für $F'(h) = 0$ imaginäre Werthe von h , der betreffende Erdbogen hat also für reelle h keine Wendepunkte, wie schon aus dem Früheren geschlossen werden konnte.

theils vernachlässigen lassen. Es gibt aber auch Lothstörungen vorübergehender oder wenigstens veränderlicher Art, die trotz ihren scheinbar geringen Beträgen nicht ganz ohne Wirkung bleiben. Die wichtigsten derselben verursacht der Mond. Jedes Niveau nimmt Theil an Ebbe und Fluth, nicht an jener des Meeres, die bekanntlich verspätet eintritt und durch Grund- und Gestadebildung stark beeinflusst wird, sondern an jener, welche bei vollständiger Ueberdeckung der Erde mit einer gleich dicken Schichte cohäsionsloser, absolut beweglicher Flüssigkeit entstehen müßte; mit dem Unterschied jedoch, daß die Bedingung, stets denselben Rauminhalt zu begrenzen, für die mathematischen Flächen wegfällt, welche wir hier betrachten. Wir dürfen z. B. annehmen, daß der vom Mond gestörte mathematische Meerespiegel den ungestörten im Indifferenzkreis berühre, jenem, dessen Punkte vom Mond gleich stark wie der Erdmittelpunkt angezogen werden, und daß er sich von dort aus über den idealen Meerespiegel beiderseits erhebe. Es steht uns aber auch frei, die Berührung gerade unter dem Mond anzunehmen oder irgendwo sonst, und an ein Hinabsinken des gestörten Niveau's unter das ruhende zu denken.

Um auf einfache Weise einen Ueberblick der Störungen unserer Nivellements bei Ebbe und Fluth zu bekommen, denken wir uns die Erde als Kugel und den Mond um 60 Erdhalbmesser entfernt. Die Fluth hängt ab von der Differenz der Mondanziehung an der Oberfläche und im Centrum der Erde und wir brauchen nur diese Differenz der Beschleunigung γ des Falles (der Erde gegen den Mond) für jeden Punkt der Erdoberfläche zu rechnen und mit dem Cosinus der Mondhöhe ($90 - \varphi$) zu multipliciren, um sofort die horizontale Beschleunigung $\Delta\gamma \sin \varphi$ zu haben, welche die Richtung der Erd-Schwere verändert. Die Verticalcomponente verschwindet gegen die Erdschwere. Das Verhältniß dieser Beschleunigung zu jener der Schwere g an der Erdoberfläche, also $\frac{\Delta\gamma}{g} \sin \varphi$ ist die Tangente des Ablenkungswinkels λ der Erdloth. Heiße die Beschleunigung des Erdcentrums gegen den Mond γ_0 und die Entfernung des Mondcentrums von einem Punkte der Erdoberfläche in Aequatorhalbmessern $= E$, so wird

$$\gamma : \gamma_0 = 3600 : E^2$$

und E^2 , durch die (geocentrische) Zenithdistanz ψ des Mondes ausgedrückt, wird: $E^2 = 3601 - 120 \cos \psi$. Nun hat man:

$$\frac{\gamma - \gamma_0}{\gamma_0} = \frac{\Delta\gamma}{\gamma_0} = \frac{120 \cos \psi - 1}{3601 - 120 \cos \psi}$$

wofür wir kurz $\frac{\cos \psi}{30}$ setzen, da hier nur eine Schätzung beabsichtigt wird. Mit gleichem Recht dürfen wir die wirkliche Mondhöhe durch die geocentrische vertauschen und wir erhalten danach die Horizontalablenkung:

$$\Delta \gamma \sin \varphi = \frac{\sin \psi \cos \psi}{30} \gamma_0$$

und hieraus

$$\operatorname{tg} \lambda = \frac{\sin 2 \psi}{60} \frac{\gamma_0}{g}$$

wobei λ in allen Fällen ein äußerst kleiner Winkel wird, dessen Maximalwerth für $\psi = 45^\circ$ etwa $\frac{1}{90}$ Secunde beträgt. Damit erklärt sich seine Vernachlässigung bei astronomischen Aufnahmen. Für einen Verticalschnitt nach dem Aequator ist $g = g_0$ zu setzen und wenn wir, zu einem Specialfall übergehend, auch die Monddeclination gleich Null nehmen und der Aequatorhalbmesser ϱ heisst, so wird für diesen Schnitt die Fluthanschwellung von Punkt zu Punkt allgemein ausgedrückt durch $\varrho \Delta \psi \operatorname{tg} \lambda$ und die Gesammthöhe der Fluthwelle durch

$$\frac{\varrho \gamma_0}{60 g_0} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2 \psi \, d\psi = \frac{\varrho \gamma_0}{60 g_0}$$

oder gleich dem Verhältniß der Mondschwere im Erdcentrum zur Erdschwere auf dem Aequator, multiplicirt mit der Länge von 57,3 Bogenminuten oder 14,324 Meilen = 10628^m.

Wenn sich die Massen des Mondes und der Erde verhalten wie 1 : 87,73 (*Kosmos I*, 389), so beträgt auch die Fallbeschleunigung der Erde gegen den Mond nur 1 : 87,73 von der Erdschwere in Mond-distanz, welche 2,69 Millimeter ausmacht. Daraus rechnet sich das Verhältniß:

$$\frac{\gamma_0}{g_0} = \frac{0,030662}{9780,60} = \frac{1}{318980}$$

und die Höhe der Fluthwelle wird 0,3332 Meter. Mit etwa $\frac{2}{5}$ der Mondwirkung theilhaftig sich die Sonne an der Welle, welche wir demnach zu 0,47^m Höhe schätzen dürfen, zur Zeit der Springfluth.

Weit weniger betragen die Störungen, von welchen ein Nivellement während der Zeit der Fluth betroffen wird, obwohl die Visirlinie des Fernrohrs genöthigt ist den gestörten Lothrichtungen zu folgen. Sie wird demnach, wenn das Nivellement während einer halben Fluthperiode stetig fortschreitet, in ihren verschiedenen Lagen eine Curve tangiren, welche alle Neigungen der Fluthwelle gegen das normale Niveau aufweist und die über dem kleineren Erdbogen, welchen das Nivellement beschreibt, eine dem Schnitt der Fluthwelle in sofern ähnliche Figur bildet, als zu proportionalen Abscissen auch proportionale Ordinaten gehören. Unter den früheren Voraussetzungen wird ein im Aequator ausgeführtes Nivellement sich auf einer Curve bewegen, für welche der vorhin abgeleitete Differenzialausdruck gilt, wenn wir ihn mit dem Factor τ multipliciren, nämlich mit dem Verhältniß der Weggeschwindigkeit des Nivellements zur Geschwindigkeit der Fluthwelle. Setzen wir also $\tau \Delta \psi$ statt $\Delta \psi$ ein und integriren,

so ergibt sich, daß auch die Höhe der Fluthwelle mit τ multiplicirt werden muß, um die Abweichung des Nivellements vom normalen Meerespiegel zu berechnen. τ ist stets eine kleine Zahl. Innerhalb $6\frac{1}{4}$ Stunden, der Zeitdauer des Ansteigens der Fluth, möge ein Nivellement von West nach Ost um 1,5 Meilen oder 6 Bogenminuten vorrücken, während welcher Zeit der Mond, der durch den Zenith des Ortes gehen soll, 90° zurücklegt. So wird $\tau = 1 : 900$ und die Fluthabweichung etwa $0,37^{\text{mm}}$.

Vorstehende Andeutungen genügen um zu zeigen, daß die täglichen Lothstörungen durch den Mond nur wenig auf die Ergebnisse der Nivellements influiren und daß sie ganz unschädlich gemacht werden können durch symmetrische Anordnung der Arbeitszeit in Bezug auf die Culmination des Erdtrabanten.

§. 11. Aufser der täglichen bewirkt der Mond durch Vermittlung der Meeresfluth noch eine säculare Aenderung der Lothrichtung, indem er die Umdrehungsgeschwindigkeit der Erde um ihre Achse allmählich verzögert.

Schon 1754 hat KANT in seinem Erstlingswerke darauf hingewiesen (und ZÖLLNER gebührt das Verdienst auf diese nunmehr überraschend bestätigte Deduction KANT's wieder aufmerksam gemacht zu haben, s. F. ZÖLLNER, *Natur der Kometen*, Leipzig 1872, pag. 472). Nachdem auch J. R. MAYER, der Begründer der mechanischen Wärmetheorie auf das Ergebniss gekommen, daß die Hemmung der Meeresfluth durch das Festland die Winkelgeschwindigkeit der Erdumdrehung verringern müsse, ist durch HANSEN's und DELAUNAY's Rechnungen über die Säcularänderung der mittleren Länge des Mondes die Erscheinung wirklich nachgewiesen. HANSEN zeigt aus der Rückwärtsberechnung der historischen Sonnenfinsternisse, daß sich diese mit der DELAUNAY'schen Säcularänderung, (welche auf HANSEN's Mondtafeln und somit auf den strengsten Beobachtungen der neueren Zeit fußt) nur mangelhaft wiedergeben lassen. »Nimmt man aber zugleich mit dieser Säcularänderung an, daß die Umdrehung der Erde um ihre Achse eine allmähliche Verzögerung dergestalt erleidet, daß jeder Tag um den 51 Billionten Theil seiner Dauer länger ist wie der nächst vorhergehende, dann kann man mit der in Rede stehenden Säcularänderung die chronologischen Sonnenfinsternisse darstellen.« (HANSEN, *theoret. Berechnung der Mondbahnen, Einleitung*, im VII. Bd. d. *Sächf. Ges. d. W., math. Kl.* Leipzig 1864).

Mit dem Quadrat der Winkelgeschwindigkeit muß auch die Schwungkraft abnehmen und damit zugleich die Abplattung der Erde. Das Meer zieht sich also allmählich vom Aequator zurück und drängt nach den Polen hin (vergl. LAMONT, *pop. Astr.* Stuttgart 1851, pag. 81) und unsre Nivellements werden nach Jahrtausenden ungültig sein, weil sie sich dann auf einen Meerespiegel der Vergangenheit beziehen, der durch die Wasserwage nicht mehr aufgefunden werden

kann. Sei v die heutige, v_1 eine frühere Winkelgeschwindigkeit der Erde und γ , γ_1 die zugehörigen Schwerkraften am Aequator, so wird

$$\frac{\Delta \gamma}{\gamma} = \frac{\gamma_1 - \gamma}{\gamma} = \frac{v_1^2 - v^2}{v^2} = \frac{\Delta v (v_1 + v)}{v^2}$$

und wir können, wenn Δv so klein ist, daß Δv^2 gegen v verschwindet, setzen

$$\Delta \gamma = \frac{2 \Delta v}{v} \gamma \quad (29)$$

Heiße wie schon früher (1) K die Abplattung, G_a die Schwere am Aequator, G_p jene am Pol, so gilt nach CLAIRAUT die Gleichung:

$$K = \frac{5}{2} \frac{\gamma}{G_a} - \frac{G_p - G_a}{G_a}.$$

Wir können G_p als constant annehmen, da es sich nur äußerst wenig verändern wird. Weil nun $dG_a = -d\gamma$, so erhalten wir durch Differenzieren:

$$\Delta K = \frac{5G_a - 2G_p + 5\gamma}{2G_a^2} \Delta \gamma = \frac{5G_a - 2G_p + 5\gamma}{G_a} \cdot \frac{\gamma}{G_a} \cdot \frac{\Delta v}{v}. \quad (30)$$

Sei $\Delta v = 1''$ Sternzeit, so wird, weil $v = 86400$ ist, unter der Annahme von $G_a = 9780,6^{\text{mm}}$; $\gamma = 33,695^{\text{mm}}$; $G_p = 9831,2^{\text{mm}}$:

$$\Delta K = -\frac{1}{8340000} = \Delta \frac{a-b}{a}$$

und wenn a nach BESSEL 6377400^{m} mißt, so wird $a \Delta K = 0,765^{\text{m}}$, welches Maß auf a und b so zu vertheilen ist, daß der Inhalt $\frac{4}{3} a^2 b \pi$ des Erdsphäroids unverändert bleibt, woraus die Bedingung folgt:

$$db = -\frac{2b}{a} da$$

Ferner findet man aus

$$K = \frac{a-b}{a}$$

$$a \Delta K = 0,765^{\text{m}} = \frac{b \Delta a - a \Delta b}{a} = \frac{3b \Delta a}{a} \quad \text{woraus folgt:}$$

$$\Delta a = \frac{a}{3b} \cdot a \Delta k \quad \text{und} \quad \Delta b = -\frac{2}{3} a \Delta k$$

und in unfrem Beispiele:

$$\Delta a = 0,256^{\text{m}} \quad \Delta b = -0,510^{\text{m}}$$

Das heißt, in einer früheren Epoche, als die Erde sich um eine Sekunde Sternzeit rascher umwälzte wie jetzt, stand das Meer am Aequator um $0,256^{\text{m}}$ höher, am Pol um $0,510^{\text{m}}$ tiefer als jetzt, unter der Bedingung, daß Erde und Meer damals denselben körperlichen Raum einnahmen wie heute, also unter gleicher Temperatur; und ohne

Rücksicht auf die Vertheilung des Festlandes, von dem hier ganz abgesehen wurde. Seit 2000 Jahren ist aber die Umdrehungsgeschwindigkeit der Erde nur um $\frac{1}{84}$ Secunde (wenn nämlich nur der Tag, nicht auch der Monat zunahm) pro Tag verzögert worden und man mag daraus ermessen, wie gering der Einfluss des Mondes auf die Abplattung der Erde in der historischen Zeit gewesen sein muß.

§. 12. Darum darf man auch das Zurückweichen des Meeres vom Land zwischen den Wendekreisen, wo es stellenweise in verhältnißmäßig kurzen Zeiträumen bemerkbar wird, nicht etwa diesem Einfluss zuschreiben, noch weniger aber ähnliche Vorkommnisse in unsren Breiten, wie z. B. das am Amsterdamer Pegel seit 1700 beobachtete Zurücktretten des mittleren Meerespiegels um 0,142^m; denn bei uns müßte im Gegentheil das Meer in Folge Verminderung der Abplattung noch im Steigen begriffen sein. Solche Erscheinungen beruhen vielmehr aller Vermuthung nach und der bisherigen Annahme entsprechend, entweder auf lokalen Erhebungen des Bodens, die sich auf Bewegungen im flüssigen Erdinnern zurückführen lassen, aber durchaus nicht auf vulkanische Gegenden beschränkt bleiben; oder auf langsamer Veränderung der Lothrichtungen, herbeigeführt durch wechselnde Dichtigkeit der Massen im Innern der Erde. Wie wir an mehreren der vorstehenden Beispiele sehen, genügen äußerst geringe, astronomisch nicht nachweisbare Lothablenkungen, wenn sie sich nur weit genug erstrecken, um merkliche Niveauunterschiede zu erzeugen. Wir brauchen daher nicht anzunehmen, daß mit jeder Erscheinung, die uns als Bodenhebung oder Senkung entgegentritt, nothwendig ein Verzerren oder Verschieben der festen Erdrinde verbunden sei. Wenn nun auch daraus folgt, daß das Meeresniveau keine ganz unveränderliche Fläche ist, nicht einmal in der historischen Zeit, und daß die Lothrichtungen im Meerespiegel selbst dem Wechsel unterworfen sind, so ist der Wechsel doch ein so langsamer, daß er wohl innerhalb der Zeiträume ignoriert werden darf, welche zur Ausführung selbst umfangreicher Nivellements erforderlich sind. Hat man diese aber einmal für einen bestimmten Zeitpunkt mit voller Zuverlässigkeit und aus Einem Guß hergestellt, so erfüllen sie eine ihrer wichtigsten Aufgaben, indem sie uns über Niveauänderungen nach größeren Zeiträumen Auskunft versprechen.

Die Controle unveränderter Höhenlage, welche uns im Binnenland nur ausgedehnte Nivellements mit unzweifelhaft versicherten Stützpunkten gewähren, bietet am Meeresufer der Wasserspiegel selbst. Demnach ist auch zum Vergleich der Erdgestalt in verschiedenen Epochen kein Niveau besser als der Meerespiegel geeignet. Die Frage, ob Bodenhebung, ob Lothstörung die Ursache späterer Niveau-differenzen sei, kann freilich durch Nivelliren nicht entschieden werden. Aufgabe der Messung ist nur, die Thatfache nachzuweisen, nicht zu erklären, und wir wollen im folgenden Capitel prüfen, wie weit wir jetzt und künftig den Nachweisen von Höhenunterschieden durch

Präcisionsnivellements Vertrauen schenken dürfen. Zwar, auch wenn sie allen Anforderungen genügen, sehr große Erwartungen wird die Wissenschaft nicht an sie knüpfen, solange diese Operationen nur auf Europa, also einen sehr kleinen Theil der Erdoberfläche ausgedehnt werden. In anderen Welttheilen wird man sich, wenigstens zur Untersuchung des Wechsels in der Erdform, wohl noch lange auf Küstenbeobachtungen beschränken müssen und froh sein, wenn man dahin gelangt, wie A. v. HUMBOLDT es vorgeschlagen (*Kosmos Ann.*, I, 474), die Meereshöhe an den wichtigsten Küsten durch Marken dauernd zu bezeichnen. Die zahlreichen und scharfsinnigen Fragen, welche HUMBOLDT (*Kosmos I*, 312—17) auf Grund der wenigen früher erfolgten Beobachtungen vom Steigen und Sinken der Küsten aufwirft, lassen es lebhaft bedauern, daß diesem Gegenstande nicht schon seit 300 Jahren, »seit den ältesten Reisen von BOUGAINVILLE und COOK«, strenge Aufmerksamkeit geschenkt wurde. Möge die Gegenwart das Ihrige thun, damit nicht nach Verlauf von nochmals 300 Jahren der gleiche Mangel periodischer Beobachtungen an den meisten Stellen der Erdoberfläche bleibe.

Cap. II.

§. 13. Als wir oben den Vorgang beim Nivelliren kurz schilderten, nahmen wir eine Libellenröhre an, deren Tangentenlage zum Niveau sich jedesmal mit aller Schärfe bewirken läßt und eine Fernrohrvisirlinie, die der Röhrenachse genau parallel gestellt ist. So dachten wir uns auch die Ziellatten makellos getheilt, streng lothrecht, von gleicher Länge und constanter Temperatur, den Raum zwischen Ziel und Fernrohr leer und unsre Geschicklichkeit im Ablesen der Lattentheilung vollkommen. Endlich setzten wir absolute Ruhe, sowohl des Untergestelles am Instrument, als auch des Erdbodens, auf dem es steht, voraus. Von allem dem trifft in Wirklichkeit Nichts ein, weshalb man von jeher bestrebt war, die Abweichungen von jener Annahme, welche sich zum Beobachtungsfehler summiren, im Einzelnen zu erkennen und danach die Aufnahmemethode so zu regeln, daß jede einzelne Abweichung möglichst klein wird. Ausgehend von Versuchen über Genauigkeit der besonderen Theile des Nivellirapparats schließt man auf die mögliche Genauigkeit bei zusammenwirkenden Fehlerquellen; da aber die äußeren Verhältnisse bei solchen Versuchen mit jenen bei der wirklichen Aufnahme immer nur theilweise übereinstimmen, so genügen die aus der analytischen Fehlerbetrachtung abgeleiteten Regeln nicht um Messungsfehler zu vermeiden. Dazu bedarf es noch der Arbeitscontrole, welche

die Resultate der Messung selbst benützt, um ein Urtheil über die wirklich begangenen Fehler zu gewinnen.

Selten gelingt es Controlen zu finden, welche die einzelnen Fehlerquellen von einander trennen, sind doch schon jene selten genug, welche die Gesamtwirkung der Fehler prüfen lassen. Hätten wir z. B. die sphäroidische Erdoberfläche als Grundlage der Höhenbestimmung gewählt, so würde der Einfluss flacherer oder stärker gewölbter Erdstellen auf das Nivellement als Fehler auftreten und wir fänden kein Mittel diesen zu erkennen. Da man aber allenthalben, theilweise unbewusst, als Ausgangsniveau den wirklichen Meerespiegel gewählt hat, so spart uns, daß Lothstörungen unbemerkt bleiben, eine Correction und wir könnten nur wünschen, daß die Verschiedenheit der Niveau-Abplattung ebenso verborgen bliebe. Bei der einmal getroffenen Wahl erübrigen jedoch noch genug Einflüsse, welche auf die Höhenbestimmung störend einwirken und sich gleichwohl der Controle fast ganz entziehen. Wir werden unten sehen, wie schwer sich eine Controle der Refractionschwankungen ausführen läßt.

Zu einer guten Arbeitscontrole gehört außerdem, daß sie sich möglichst auf die Einzelbeobachtung erstreckt, nicht erst auf eine Function mehrerer Beobachtungen. Diese neue Forderung würde, in ihrer letzten Consequenz, bereits fehlerfreie Beobachtungen voraussetzen und die fernere Messung überflüssig machen. Wir bescheiden uns daher, Functionen der Beobachtungseinheit zu prüfen und werden dabei jene Prüfungen vorziehen, welche die geringste Anzahl von Beobachtungswerthen umfassen und deren Vergleich mit neuen Werthen ermöglichen, die selbst auf andrem Wege gefunden und mit verhältnißmäßig geringen Fehlern behaftet, oder, noch besser, aus den mathematischen Bedingungen der Aufnahme abgeleitet sind. Solcher Bedingungen, wie bei Triangulationen die Uebereinstimmung der Dreieckswinkelsumme mit 180° plus dem sphärischen Excess, finden sich auch bei richtig angelegten Nivellements. So muß ein geometrisches Nivellement, welches mit Zielweiten von nur 1 Bogensecunde mässige Höhen überschreitet und dann zum Ausgangspunkt zurückkehrt, hier die Anfangscote ergeben, weil, solange alle durchschrittenen Niveaux als concentrisch betrachtet werden dürfen, jenes Niveau, auf welches sich alle einzelnen Höhenablesungen beziehen, als continuirliche Fläche angesehen werden kann und der Ersatz der Niveaubögen durch die berührende Visur keinen für unsre Sinne erkennbaren Fehler erzeugt, wie auch die Niveaux (innerhalb der Grenzen der Möglichkeit) gestaltet seien. Die Bedingung gleicher Anfangs- und Endcote gilt auch noch nach dem Ueberschreiten größerer Höhen, wenn die Correction wegen Meridiankrümmung der Lothe (wie bei der Dreiecksaufnahme der sphärische Excess) in Rechnung gebracht ward, und verliert erst ihre Geltung an Erdstellen, wo die Lothe noch durch locale Attraction gebogen sind.

Man erkennt aber leicht, daß in Polygon Schlüssen sich eine große Zahl von Einzelfehlern theils angehäuft, theils ausgeglichen hat und

dafs wir aufer der Bedingung gleicher Anfangs- und Endcote noch ein Gesetz der Fehleranhäufung zu Hülfe nehmen müssen, um die Genauigkeit der Arbeit zu beurtheilen. Nun ist es immer misslich, die Gesetze, welche aus Wahrscheinlichkeitsgründen abgeleitet sind, auf eine einzige Beobachtungsgröfse anzuwenden, beispielsweise aus dem zufälligen Schlussfehler σ eines Polygons und der Zahl m der Instrumentenstände, welche zu dessen Nivellement dienten, den mittleren Fehler der Beobachtungseinheit gleich $\sigma : \sqrt{m}$ zu berechnen. Dies Verfahren wäre nur zulässig, wenn σ selbst ein mittlerer Fehler wäre. Wir sind deshalb darauf angewiesen, noch andere Controlen zu suchen, welche weniger Stände umfassen: so das Doppelnivellement kleinerer Stücke der Schleife und endlich das Doppelnivellement des einzelnen Standes. Aus der grofsen Zahl der so gewonnenen Fehlerbestimmungen läfst sich dann mit ausreichender Schärfe die Genauigkeit der Einzelarbeit berechnen und mit jener von anderen ähnlichen Aufnahmen vergleichen.

Das Doppelnivellement des einzelnen Standes wird etwas erleichtert, wenn man mit doppelten Wechselfunkten nivellirt, wobei für die zweite Aufnahme nicht die Visirhöhe des Instruments, sondern die Stellung der Ziellatten - Fußpunkte verändert wird. Während bei der Aufnahme mit wechselnder Visirhöhe als Forderung gilt, dafs die beiden gewonnenen Niveaudifferenzen aus Rück- und Vorblick *eines* Standes einander gleich sein sollen, schliesst das Nivellement mit doppelten Wechselfunkten a und b zwischen *zwei* Instrumentenständen die Bedingung ein, dafs der Vorblick nach a vermehrt um den Rückblick des nächsten Standes nach b , und der Vorblick nach b vermehrt um den Rückblick des nächsten Standes nach a , gleiche Summen ergeben oder, was dasselbe sagt, dafs die Niveaudifferenz der Visur des ersten und zweiten Instrumentenstandes sich an der Ziellatte in beiden Stellungen a und b gleich stark ausspreche, freilich nicht immer im wahren Betrag. Weil aber das beschriebene Verfahren, nach welchem ein grofser Theil der süddeutschen Nivellements ausgeführt wurde, keine Controle für den einzelnen Stand, sondern eine solche nur zwischen je zwei Nachbarständen gestattet, hat man in Bayern (BAUERNFEIND, *das bayr. Präcisionsnivellement*, I u. II. Mittheilung, München 1870 u. 72) die gegenseitige Höhenlage der Wechselfunkte nicht länger dem Zufall überlassen, sondern ihr durch einfache Abänderung der Fußplatten (eiserne Lattenunterlagen) ein genau bekanntes Mafs gegeben. Während also bisher die Summe oder Differenz zweier Blicke mit der Summe oder Differenz zweier anderen von gleicher Unsicherheit verglichen wurde, geschah der Vergleich jetzt mit einer Gröfse, welche den Visuren gegenüber als fehlerfrei betrachtet werden konnte: eine so günstige Lage, wie sie bei anderen Aufnahmen als Nivellements nicht leicht wieder eintritt, namentlich was die geringe Zahl der controlirten Beobachtungselemente betrifft. Gleichwohl werden wir den erlangten Vorthail dadurch beeinträchtigt sehen, dafs die gewonnene Controle nicht alle

Fehlerursachen einschließt, also auch nicht den ganzen Fehler erkennen läßt.

Fast wichtiger noch, als die durch Arbeitscontrolen gewährte Möglichkeit den Beobachtungsfehler zu schätzen, ist die andere, ihn einzuschränken. Man kann die Fehlergrenze festsetzen und jede Aufnahme, welche sie überschreitet, erneuern und dadurch sicher sein, daß der Gesamtfehler auch eine gewisse gesetzmäßige Grenze nicht überschreiten wird; ja man kann das Gesetz der Fehleranhäufung während der Arbeit dadurch vorschreiben. Scheint das bayerische Präcisionsnivellement, bei welchem in strengster Consequenz die Fehler auch im Kleinen begrenzt werden sollten, eben nicht durchweg für die Erfolge dieser Manipulation zu sprechen, so wird sich in Hinsicht des zweiten Punktes weiter unten doch ein sehr annehmbares Resultat zeigen. Vorerst aber sollen, gestützt namentlich auf die gründlichen Untersuchungen, welche HIRSCH mit dem schweizerischen Nivellir-Apparat vornahm (*Nivellement de précision de la Suisse par HIRSCH & PLANTAMOUR, I.—III. Lieferung, Genf und Basel*) sowie auf eigene Erfahrungen, die Fehler beim Gebrauch der einzelnen Instrumententheile etwas näher betrachtet werden.

§. 14. Die Flüssigkeit der Libellenröhre tritt, wie alle Flüssigkeiten, die nur der Schwungkraft und Schwere unterworfen sind, in's Gleichgewicht, wenn ihre Oberfläche normal zur Resultante jener Kräfte steht. Die Adhäsion des Aethers an der Libellenröhre ändert daran nichts, verzögert nur zuweilen den Eintritt des Gleichgewichtszustandes. Bei richtig nach der Kreislinie geschliffenen Röhren von gleichvertheilter Temperatur ist demnach die Berührende der Scalennitte auch eine Berührende des Erdniveau's, wenn die Enden der Luftblase gleichweit von der Mittelmarke abstehen, einerlei, nach welchem Radius die Libelle geschliffen ist. Wegen der schlechten Wärmeleitung des Glases ändert sich dies Verhältniß wesentlich durch ungleiche Erwärmung der Röhre. Rasche Temperaturerhöhung einer Scalenstelle bewirkt blasenartige Wölbungen derselben, in welchen der Aetherdampf sich sammelt, sodafs die Luftblase von solchen Stellen angezogen erscheint. Man umgibt die Libelle deshalb mit einer Metallröhre, welche nur die Scale freiläßt, und außerdem mit einem halb- oder ganzrunden Glasröhrenstück zur Bedeckung der Scala, oder man gibt ihr eine Holzfassung und deckt dieselbe mit einem Planglas. Während des Gebrauches im Freien beschattet man sie sorgfältig und bewahrt sie vor dem Einfluß der Körperwärme. Manche bedienen sich deshalb der Ablefungs Spiegel, welche entweder außer- oder innerhalb der schützenden Glasröhre angebracht sind und im letzteren Falle (nach REPSOLD) sich an dem hinausragenden Knopfende ihrer Achse drehen lassen. Hierdurch und mit Hülfe eines feinen Schraubenmechanismus gelingt es, die Einstellung der Mitteltangente in das Niveau bloß noch von der Ruhe des Instruments und der Genauigkeit unserer Scalenablefung abhängig zu machen, und da man alle Libellen ohne Unter-

schied der Empfindlichkeit nach pariser Linien theilt (selten nach Millimetern), so wird die Genauigkeit der Einstellung proportional dem Krümmungsradius und umgekehrt proportional dem Theilwerth der Libelle.

Weil aber die Luftblase einige Zeit braucht, um definitiv zur Ruhe zu kommen, so hält die genaue Einstellung feiner Libellen lange auf und man umgeht diese Verzögerung durch Berechnung einer Reduction, welche sich auf Messung des Inclinationswinkels an der Libellenscala selbst stützt. HIRSCH hat dieses in der Astronomie längst gebräuchliche Verfahren auch auf das Nivelliren ausgedehnt und es ist seitdem vielfach in Aufnahme gekommen, hauptsächlich auch aus dem Grunde, weil sich die Instrumentengestelle im Freien fast unaufhörlich bewegen, die Libelle also selten ganz ruhig wird und man genöthigt ist, unter Voraussetzung gleichmäßiger Bewegung, eine mittlere Lage ihrer Achse aufzufuchen, auf welche sich die Fernrohrvisur beziehen läßt. Dies geschieht durch Ablefen des Blasenstandes vor und nach der Fernrohraufnahme und es hat keinen Vorthail mehr, die erste Neigung auf Null zu bringen, wenn sie sich nicht so erhalten läßt. Die constante Achsenlage mit Hilfe eines zweiten Beobachters zu erzwingen, welcher den Schraubenmechanismus beständig handhabt, scheint mir ein mangelhafter Nothbehelf. Durch Hin- und Herschrauben kommt der Libellenäther in eine, wenn auch schwache, oscillatorische Bewegung und man kann sehr leicht den Wendepunkt der Schwingung mit der Ruhelage verwechseln. Auch erzeugt der todte Gang der Elevationschraube ruckweise Lagenwechsel, denen die Luftblase nicht sofort wie den stetigen folgt und die sich, selbst bei der besten Einrichtung, nur dann ganz vermeiden lassen, wenn die Schraube zu kleinen Bewegungen nur in Einem Sinne gebraucht wird.

Es ist auch nicht Zeitgewinn, den die Vertheidiger der horizontalen Libelleneinstellung beabsichtigen, dieser kommt vielmehr der schiefen Achsenlage zu Gute. Aber man fürchtet die Fehler, welche ungleicher Schliff und ungleiche Temperatur erzeugen können. Von den größeren Werkstätten, namentlich REPSOLD und ERTEL, kann man aber fast fehlerfrei geschliffene Libellenröhren beziehen und nur solche dürfen zu Präcisions-Nivellements verwendet werden. Zudem bestimmt bei schlechtem Schliff auch die Mittellage der Blase nicht immer ein und dieselbe Achsenlage; sie thut es nur für gleiche Blasenlängen. Dagegen ist der Einwurf wohl begründet, daß auch bei vorzüglichen Libellen unter dem Wechsel der Temperatur gleiche Ausschläge nicht gleichen Achsenneigungen entsprechen. Es scheint, daß geblasene Gläser sich unterm Einfluß der Wärme nicht nach allen Richtungen gleichmäßig ausdehnen, sondern den größeren Dehnungscoefficienten in der Richtung der Längenachse, den kleineren senkrecht dazu aufweisen. Die Veränderungen der Libellenkrümmung deuten darauf hin und die sehr von einander abweichenden Angaben über den Dehnungscoefficienten des Glases lassen die Annahme zu. Die bayerischen Libellen (von ERTEL), welche an den Enden zugeschmolzen sind, zeigten von 0 bis 200 C. eine Verminderung ihres Theilwerthes

um mehr als $\frac{1}{3}$ des mittleren ($4,5''$) und wenn man annimmt, die Röhre habe sich dabei nur in der Achsenrichtung ausgedehnt, sodafs wohl die Sehne, aber nicht der Pfeil der Libellenkrümmung zugenommen hat, so darf man wegen Kleinheit der Bogenstücke das Quadrat der Sehnen S_0 und S_1 (für 0 und 200°) proportional den Krümmungsradien und umgekehrt proportional den Winkelwerthen p_0 und p_1 der Scalentheile setzen. Aus der Differenz der Quadrate, die wir durch das wenig davon verschiedene Product $2(S_1 - S_0) S_1$ ersetzen, folgt der Ausdehnungscoefficient

$$\Gamma = \frac{S_1 - S_0}{20 S_1} = \frac{p_0 - p_1}{40 p_0} = 1 : 120 \text{ (nahezu).}$$

Da aber Γ für Glas nach directen Bestimmungen nur etwa $1 : 116000$ beträgt, so möchte man auf eine Contraction des Röhrenumfangs bei Wärmezunahme schliessen, zu deren Nachweis jedoch zwei directe Messungen erforderlich wären, eine der Achsenausdehnung und eine der Volumänderung (im Quecksilberkolben). Lassen wir den Grund der Erscheinung dahingestellt sein, genug, dafs sie mit hinreichender Regelmässigkeit auftritt, um der Berechnung unterworfen zu werden, wozu die astronomischen Lehrbücher auch rathen. Will man bei der Rechnung von der Veränderlichkeit des Theilwerthes absehen, so ist man genöthigt, entweder die Ausschläge so klein zu wählen, dafs die Variation des Winkelwerthes innerhalb des Ablefungsfehlers verbleibt; oder eine Compensation herbeizuführen, indem man die Neigungs correction bald positiv, bald negativ macht.

Jedes geübte Auge ist im Stande, noch Zehntel der pariser Linie richtig zu schätzen (feinere Theilungen nützen wenig, der Parallaxe wegen), also erlaubt ein Instrument, woran p den kleinsten im Freien verwendbaren Werth hat, nämlich $3''$, noch die Drittelsecunde abzulesen, und die Genauigkeit vergröfsert sich noch etwas dadurch, dafs an beiden Blasenenden, sowohl vor als nach der Fernrohraufnahme, abgelesen wird. Setzt man sich für das Laufen der Luftblase zwischen der ersten und letzten Ablefung eine enge Grenze, etwa eine, höchstens zwei Secunden, so wird die Genauigkeit nur wenig beeinträchtigt durch Unsicherheit der Hypothese, dafs dieses Laufen proportional der Aufnahmezeit erfolgt sei und wir können bei einer gut geschützten Libelle von $3-5''$ Theilwerth zuversichtlich annehmen, dafs der Ablefungsfehler $\frac{1}{2}$ Secunde nicht erreiche. Da demnach das Quadrat der Fehlergrenze nur etwa halb so grofs ist als das Quadrat des wahrscheinlichen Beobachtungsfehlers, den wir gleich $0,7''$ finden werden, so müssen auf dessen Zusammensetzung andere Fehler weit stärker influiren.

An der Correction C wegen geneigter Libellenachse betheiligt sich noch eine andere Beobachtungsgröfse, nämlich die Zielweite z in der Weise, dafs

$$C = \frac{z \alpha}{206265}$$

wird, wo α jene Neigung in Secunden bedeutet. Soll die Unsicherheit

der Zielweite zu jener der Libellenablefung keinen größeren Fehler als 0,1'' hinzufügen, so gilt

$$\Delta z < \frac{z}{10\alpha}$$

eine Bedingung, welche leicht zu erfüllen ist, da α selten 10 bis 15'' übersteigt. Die Genauigkeit der Längenmessung von 1 : 100 bis 1 : 150 lässt sich durch einen Oculardistanzmesser jederzeit erreichen, selbst durch noch einfachere Mittel, und es begreift sich, dass man in Bayern keine neuen Correctionstabeln entworfen hat, als die Coefficienten der Distanzmesser ($\frac{2}{3}$ der Objectivbrennweite dividirt durch den Abstand der äusseren Fäden des Huyghens'schen Oculars) an den beiden gebrauchten Instrumenten im Laufe zweier Jahre folgende Variationen zeigten:*)

	J. I	J. II
Herbst 1868	137.76 $\pm$ 0,08	
Herbst 1869	137.41 $\pm$ 0,03	136,32 $\pm$ 0,05
März 1871	137.932 $\pm$ 0,024	136,394 $\pm$ 0,014
Januar 1872	137.757 $\pm$ 0,033	136,329 $\pm$ 0,026

In der Schweiz variirten die entsprechenden Zahlen (Mikrometerocular, ganze Objectivbrennweite durch den Fadenabstand dividirt) in folgender Weise:

	J. I	J. II
1866	504,35 $\pm$ 0,14	1865 496,84 $\pm$ 0,10
1867	505,27 $\pm$ 0,40	1867 499.94 $\pm$ 0,24
1869	502,25 $\pm$ 0,26	

Auch hier war die Neuberechnung der Correctionstafel überflüssig.

§. 15. Ehe wir zu den Fehlern der Fernrohrvisur übergehen, betrachten wir jene, welche die Verbindung der Libelle mit dem Fernrohr sowie den Mechanismus des letzteren betreffen, dann jene, welche mit der Construction des Stativs zusammenhängen.

Die Fehler, welche den Parallelismus der Fernrohrvisirlinie und Libellenachse stören, sind theilweise der Berichtigung durch Correctur-

*) Für Distanzmesser zu allgemeiner Anwendung jedoch würden diese Werthschwankungen, welche bei J. I schon 1 : 300 übersteigen, höchst lästig und unter Umständen eine Quelle bedeutender Fehler geworden sein. Ihr Hauptbetrag rührt her von der Verschiebbarkeit des Diaphragma-Ringes nach der Längsachse, eine Einrichtung, welche bei dem HUYGHENS'schen Distanzocular durchaus überflüssig ist, aber mit Zähigkeit von dem Institut festgehalten wird, dessen Begründern wir beides, Einführung und Verbesserung der Oculardistanzmesser verdanken. Wenn statt des Diaphragma-Ringes sammt dem Augenglas nur dieses verschiebbar und ausserdem die Collectivlinse in einem hinreichend langen, federnden Muttergewinde gegen das Fadenkreuz etwas beweglich ist, so kann das letztere aus fest miteinander verbundenen Fäden von gehörigem Abstand bestehen und alle Schrauben ausser denen zum Centriren des Diaphragma's werden überflüssig. Die polytechnische Schule in München besitzt ein solches Ocular, welches einfach und solid zugleich ist.

schrauben zugänglich, wie die Ungleichheit der Libellenfüsse, die Excentricität des Fadenkreuzes; theilweise auch nicht, wie der Fehler der Ringhalbmesser am Fernrohr, die Excentricität des Objectivs und der schiefe Gang der Ocularröhre. Und wenn auch im Allgemeinen diese Fehler in ihren Beträgen nur wenig wechseln, selten wird man dahin gelangen, ihre algebraische Summe gleich Null zu machen, weshalb das Nivellirverfahren Sorge tragen muß, den Rest ihres Einflusses zu tilgen, was durch Wahl gleicher Zielweiten im Vor- und Rückblick auch geschieht. Da aber diese Gleichheit nie eine ganz strenge ist, und der Fehler im Parallelismus von Fernrohr- und Libellenachse doch noch auf die kleinen Unterschiede der Zielweiten und deren Summe merklich einwirken kann, so muß man, wie in Bayern, diese Summe zwischen je zwei Fixpunkten Null werden lassen oder, wie in der Schweiz, sie berechnen und dafür eine Correction aus dem Instrumentenfehler des Tages anbringen.

Wir haben hier nicht von der Berichtigung des Instruments, sondern von den übrigbleibenden Fehlern zu reden, also hauptsächlich von denen, welche sich nicht durch Correcturschrauben beseitigen lassen. Dafs die Differenz der Ringhalbmesser hierzu gehört, veranlafste den scharffinnigen F. W. BREITHAUPT, Gründer der bekannten Firma, bei Nivellirinstrumenten die Ringe selbst zu beseitigen. Da sich aber immer eine solche Verbindung der Instrumententheile treffen läßt, dafs die übrigbleibenden Fehler sich nahezu compensiren, so möchte den Ringen mit aufgesetzter Libelle aus dem Grunde der Vorzug zu geben sein, weil nur diese Anordnung gestattet, Kreuzung der Libellen- und Fernrohrachse leicht zu erkennen und zu tilgen. Zudem ist die Differenz der Ringhalbmesser bei vernünftiger Behandlung der Instrumente eine äußerst beständige Gröfse und gute Werkstätten schliessen sie in enge Grenzen ein. Ihr Winkelwerth wächst bekanntlich verkehrt proportional dem Abstand beider Ringe und dem Sinus des halben Ausschnittwinkels α der Libellenfüsse, sodafs der kreisförmige Ausschnitt ($\alpha = 180$) dem günstigsten Falle entspricht. Auch ist man jetzt fast überall wieder zu dieser Form zurückgekehrt. Der Winkelwerth der Ringdifferenz läßt sich also ein für allemal bestimmen (wobei noch auf die Form der Fernrohrlager, d. h. jener, welche bei der Prüfung dienen, zu achten ist) und sein Einfluß durch Rechnung oder Compensation unschädlich machen. Anders ist es mit der erwähnten Achsenkreuzung, deren Einfluß auf Verticalwinkel mit der Stellung des Alhidadenzapfens variabel und nur Null in jener Stellung ist, bei welcher die Libellenfüsse corrigirt wurden. Setzen wir voraus, dafs es die lothrechte war und sei β der Winkel, welchen in einer Projectionsebene senkrecht zur Visirrichtung die schiefe Zapfenachse mit dem Loth macht und γ der Kreuzungswinkel der Fernrohr- und Libellenachse; φ die Neigung des Fernrohrs, wenn jetzt die Libelle wieder einspielt; so berechnet sich:

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \gamma \sin \beta$$

und wenn statt Sinus und Tangente der Bogen in Secunden eingeführt wird:

$$\varphi = \frac{\beta}{206265} \gamma$$

Sorgt man nun auch, wie es allgemein geschieht, durch eine Dosenlibelle für Lothrechtstellung der Zapfenachse, so kann diese dennoch um mehrere Minuten schief stehen und es trifft sich leicht, daß das Maximum der Abweichung, sagen wir $206''$, in die Richtung jener Projectionsebene fällt. Dann wird $\varphi = 0,001 \gamma$ und der Kreuzungswinkel γ braucht nur, was leicht möglich, $5'$ zu betragen, um den unvermeidlichen Libellenfehler durch einen vermeidlichen ganz bedeutend zu verstärken, nämlich um $0,3''$.

Jedoch, so variabel er sonst ist, von der Zielweite ist der Winkelwerth dieses Fehlers wenigstens nicht abhängig. Das ist aber der Fall bei der Excentricität des Objectivs und des Fadenkreuzes, soweit letztere aus dem schiefen Gang der Ocularröhre entsteht. Beide Excentricitäten, welche sich zum Collimationsfehler des Fernrohrs vereinigen, nehmen aber mit wachsender Zielweite mehr und mehr constante Werthe an, können auch für geringe Verrückung des Zieles als constant betrachtet werden und unterliegen daher im Wesentlichen der gleichen Behandlung wie die übrigen Neigungsfehler der Libellen- und Fernrohrachse. *)

§. 16. Ohne Zweifel ist es für den Mechaniker schwer, solche Mängel, wie die vorgenannten, ganz zu entfernen. Um so mehr muß er sich hüten, in Nebendingen der Construction neue Fehlerquellen einzuführen, deren Beseitigung die Aufmerksamkeit des Beobachters unnöthiger Weise in Anspruch nimmt und von wichtigeren Dingen abzieht. Dahin gehört z. B. der Abstand der Fernrohrachse vom Drehpunkt der Elevation. Vom gleichen Gesichtspunkte aus ist die Wahl des Stativs und die seiner Verbindung mit dem Instrumente zu treffen. Gegenwärtig begünstigt die Mode durchbrochene Stativbeine, die sich bei mäßigem Winde schon durchbiegen und die Arbeit sehr erschweren; wenigstens thaten dies die Stative der bayerischen Instrumente: ein vorgehaltener Schirm, der jedoch nur die Beine, nicht den oberen, wichtigeren Theil des Instruments gegen Wind schützte, reducirte die Bewegungen der Luftblase und das Zittern des Fernrohrs fogleich. Andererseits natürlich verstärkte sich die Unruhe, wenn irgend eine der Schraubenklemmen nicht fest angezogen war und Aehnliches muß in noch höherem Grade eintreten bei Instru-

*) Der Collimationsfehler ist für die Zielweite ∞ beseitigt, wenn der Fadenkreuzpunkt des Oculars um ebensoviel und in derselben Richtung seitwärts der mechanischen Fernrohrachse steht, als der optische Mittelpunkt des Objectivs. Bei kleineren Zielweiten tritt er sofort wieder auf und wächst, wegen der Objectivstellung im verkehrten Verhältniß der Entfernung, und wegen unrichtigen Ocularganges in einem Maße, das a priori nicht bestimmbar ist. Abweichungen vom ersten Verhältniß verschaffen uns jedoch Gewißheit über Vorhandensein des zweiten Mangels, aber es ist unmöglich, die Beträge beider Fehler ganz zu trennen.

menten, die mit dem Stativteller durch nichts als ihr Gewicht verbunden sind. Den Stativen nach REICHENBACH mit der Hackenverbindung von ERTEL oder BREITHAUPt möchte ich der Form nach den Vorzug geben, und dem Material nach denen, welche sich, theilweise von der Sonne oder dem heißen Boden bestrahlt, am wenigsten verändern. Es ist noch die Frage, ob nicht metallene Beine, durch rasche Vertheilung der Wärme, gleichmässigere Bewegungen der Libelle bewirken würden, als es hölzerne thun, bei welchen schon eine beschienene Fusspitze ausreicht, das ganze Instrument in Unruhe zu versetzen. Neigungswechsel der Libelle um 5" innerhalb einer Zeitminute sind in solchen Fällen etwas ganz Gewöhnliches. Vielleicht empfiehlt es sich hiergegen, die Holzbeine noch einmal mit schlechten Wärmeleitern zu umwickeln (Stroh- oder Binsengeflecht), denn gegen die Bodenstrahlung sind auch die umfangreichsten Schirme wirkungslos.

§. 17. Im Folgenden müssen wir nun annehmen, dass alle im Bau des Instruments gelegenen Unvollkommenheiten theils durch Correcturvorrichtungen, theils durch zweckmässige Anordnung der Aufnahme unschädlich gemacht seien. Es bleibt dann am Instrumente noch der Zielfehler als Hauptstörung der Genauigkeit des Resultats übrig, der ebenso sehr in der Unvollkommenheit unserer Fernrohre als unserer Sinne begründet ist und den wir niemals durch Verbesserung der ersteren ganz entfernen können. Gleichwohl sind die Fernrohrdimensionen darauf vom grössten Einfluss und nächst der Empfindlichkeit der Libelle entscheidend für die Güte eines Nivellirinstrumentes. Ueber die Abhängigkeit des Visurfehlers von der Vergrößerung des Fernrohrs sind von STAMPFER im Jahre 1833 eingehende Versuche angestellt und in PRECHTL's *Jahrbüchern des Wiener polytechnischen Instituts* Bd. 18 mitgetheilt worden. Mit Dioptern und Fernrohren, letztere von der Vergrößerung 1 bis 96, haben STAMPFER und einige andere Beobachter schwarze, runde Zielpunkte auf weissem Felde, die in der Entfernung von 25—30 Metern angebracht waren, wiederholt durch den Verticalfaden entweder halbirt oder seitlich tangirt, wobei die Richtung der Alhidade mittelst Nonien und Fühlhebel gemessen und aus der Abweichung der Resultate unter sich das arithmetische Fehlermittel gezogen wurde. STAMPFER zieht aus seinen Versuchen den Schluss, dass, »wenn die zwischenliegende Luft keinen störenden Einfluss üben würde«, die Visurfehler nahezu der Vergrößerung umgekehrt proportional seien und sich demgemäss durch einfache Rechnung aus dem Visurfehler der Vergrößerung 1 oder des freien Auges ermitteln lassen, dessen Durchschnittszahl STAMPFER zu 3—4 Secunden schätzt (p. 223) und selbst bei Dioptern, wo die verschiedene Accommodation des Auges für Ziel und Diopterfaden störend wirkt, noch unter 10" gefunden hat. Zwischen diesen Grenzangaben liegt der Durchschnittsfehler 6,2", das Mittel aus den mit der Vergrößerung multiplicirten Visurfehlern (a. a. O. pag. 231), welches mit 0,845 multiplicirt den wahrscheinlichen Visurfehler 5,24" als denjenigen ergibt,

mit welchem sich die STAMPFER'schen Versuche nach der mitgetheilten Regel am besten interpoliren lassen. Da nun die Fernrohre, welche bei Präcisionsnivellements gebraucht werden, 20 bis 45 fache Vergrößerung bei entsprechender Brennweite besitzen, so sollte man die wahrscheinlichen Visurfehler hinreichend klein erwarten um wenigstens die Grenze der Libellenfehler nicht zu überschreiten. Durch Zielversuche nach getheilten Latten werden wir jedoch sogleich eines Anderen belehrt und als Beispiel mögen jene dienen, welche HIRSCH anstellte um zu prüfen, ob die Ablefung der Centimeter-Bruchtheile durch ein Fadenmikrometer oder die bloße Abschätzung derselben den Vorzug verdiene. Mit 2 Instrumenten, deren Fernrohre 42 und 43 mal vergrößern und welche nach STAMPFER den wahrscheinlichen Visurfehler $\pm 0,12''$ erwarten lassen sollten, beobachtete man den Abstand der äußeren Ocularfäden in ihrer Projection auf die Latte und verglich ihn mit demjenigen, welchen die Rechnung für die benützten Distanzen (zwischen 10 und 100^m) ergab. Es fand sich für einmalige Theilung eines Centimeters der wahrscheinliche Fehler bei den Instrumenten:

	J. I	J. II
durch Abschätzung	$\pm 0,565''$	$\pm 0,750''$
durch Mikrometermessung	$\pm 0,750''$	$\pm 1,064''$

also für die Schätzung der 5—6 fache Betrag der STAMPFER'schen Beobachtung, für Mikrometermessung noch mehr. Die Erklärung für diese Differenz liegt in der gänzlich verschiedenen Faden-Einstellung bei den Versuchen von STAMPFER und HIRSCH, sie liegt schon in dem oben angeführten Vorbehalt STAMPFER's und in dessen Ausspruch am Ende seiner Abhandlung, wonach er seine Versuchsergebnisse als die Grenze angesehen haben will, »welcher sich die Genauigkeit des Zielens um so mehr nähern wird, je günstiger die Umstände sind«. Das Auge theilt mit größerer Sicherheit regelmässige Figuren in zwei gleiche Theile, als es das Verhältniß ungleicher Stücke eines Rechteckes schätzt, und die Schwierigkeit vermehrt sich erfahrungsgemäß mit der Verschiedenheit der Stücke. Geübte Augen sind weder bei der einen, noch bei der anderen Operation von Fehlern frei, zeigen aber im Begehen dieser Fehler eine auffallende Regelmässigkeit, welche den STAMPFER'schen Versuchen zu Gute kam, nicht aber jenen in der Schweiz, und aus der überhaupt beim Ablefen eingetheilter Scaln nur schwer Vortheil gezogen werden kann. Ein Aushilfsmittel, welches in Bayern angewandt wurde, ist, die Ziellatte nur in solchen Distanzen aufzustellen, bei welchen die 3 Fäden des Oculars auf verschiedene Centimeterstellen treffen, wodurch sich die regelmässigen persönlichen Schätzungsfehler zum Theil compensiren. Da dieselben mit der Ungleichheit der Centimetertheile wachsen, so müssen sie an der Grenze zweier Centimeter ihr Maximum erreichen und es wird erklärlich, warum die Mikrometermessung, welche sich aus zwei Grenzeinstellungen und einer Deckung von Faden auf Faden zusammensetzt, im Durch-

schnitt weniger genau ausfällt als die Schätzung. Die STAMPFER'schen Versuche mit Einstellen des Verticalfadens als Berührende an den Zielkreis widersprechen dem nicht, denn es ist ein Anderes die Berührung einer Geraden und einer krummen Linie, ein Anderes das Zusammenfallen zweier parallelen Geraden zu beurtheilen, zumal wenn der Faden sich einerseits vom dunkeln Felde nicht abhebt. Man hat deshalb auch vorgeschlagen, die Theilung der Scala in rother statt in schwarzer Farbe auszuführen und die Centimetergrenzen noch durch runde schwarze Punkte zu bezeichnen. Von einer engeren Theilung der Felder durch parallele Linien, etwa auf Viertel- oder Fünftelcentimeter, ist aus den hier erörterten Gründen kein besonderer Vortheil zu erwarten, bei der üblichen schlechten Ausführung der Lattenscalen wird diese Untertheilung sogar eine neue Fehlerquelle.

Viel wirksamer ist die Vermehrung der Ocularfäden von 1 auf 3, welche die Schweiz in Folge der erwähnten Untersuchung und nach ihr die meisten anderen am Nivellement beteiligten Länder einführten. Das Mittel der 3 Ablefungen verkleinert bei günstiger, d. h. recht verschiedener Lage der Fäden, den Zielfehler fast um die Hälfte, und seine Uebereinstimmung mit der Ablefung des Mittelfadens dient zugleich als Controle gegen grobe Messungsfehler. Gegen solche wichtige Vortheile kommt die Zugabe eines neuen Instrumentalfehlers, bei ungleichem Abstand der äusseren Ocularfäden vom Mittelfaden, nicht in Betracht, zumal er durch die Aufnahme aus der Mitte (mit gleichen Zielweiten) unschädlich gemacht wird.

§. 18. Was aber die Gemeingiltigkeit der Versuchsergebnisse über Genauigkeit des Zielens verhindert, das ist die Strahlenbrechung der Luft und deren Wechsel, welcher sich wohl nirgends so sehr äussert als bei den Operationen geometrischer Nivellements, deren Ziellinien nahe dem Erdboden hinstreichen. Man hat dabei mit zweierlei Schwankungen der Refraction zu kämpfen. Die erste, auffallendste Art äussert sich durch pendelartiges Wallen und Zittern der Fernrohrbilder um eine mittlere Lage, und wenn dabei auch die grössten Schwingungen in verticaler Richtung auftreten, so sind doch auch die horizontalen deutlich wahrnehmbar, wenn nicht mit blossem Auge, so doch mit mehr oder weniger starkem Fernrohr. Sie rühren her von rauchwolkenartigem Aufströmen der erhitzten Luft und des in ihr enthaltenen Wasserdampfes und sind in der Nähe des Erdbodens und um jene Zeit am stärksten, wo die Rückstrahlung der Sonnenwärme durch den Boden am kräftigsten erfolgt und die Luft durch Ausdehnung ihrer untersten Schichten in fortwährend wechselnder Bewegung erhält. In den Stunden nächst der Mittagzeit erscheinen die Umrisse entfernter Gegenstände selbst für das freie Auge verschwommen. Während so die Lichtstrahlen um eine Mittellage saitenartig schwingen, ist auch diese selber einem, wenn auch langsameren, Wechsel unterworfen und das ist die zweite Art der Refractionschwankung. Sie ist das Ergebniss des allmählichen Wechsels im Dichtigkeitsverhältniss

der übereinander gelagerten Luftschichten, welche durch jene wolkenförmigen Ströme nur durchbrochen werden, ohne daß dieselben vermöchten, die Gleichgewichtslage im Großen zu stören. Aber je nachdem in einiger Entfernung vom Boden die Ausstrahlung der Luft oder die der Erde überwiegt und je nach der Abnahme der Lufttemperatur mit der Höhe treten Verdichtung oder Ausdehnung der Luftschichten und damit stärkere oder schwächere Krümmungen der Lichtcurve ein, die, obwohl weniger heftig, doch weit schädlicher auf die Beobachtungen einwirken als das Zittern der Bilder, eben darum weil sie nicht so leicht entdeckt werden. Die hier geschilderten Refractionserrscheinungen bedingen sich nicht gegenseitig, machen sich vielmehr zuweilen einzeln, dann wieder beide gleichzeitig bemerkbar.

Was nun die erste, das Zittern der Bilder, betrifft, so ist dieses sogar manchmal dem Beobachter günstig, wenn es in schwachen Beträgen und gleichsam im Takt erfolgt und der Ocularfaden gerade auf eine Centimetergrenze oder in deren Nähe trifft. Aber sehr bald übt es den nachtheiligsten Einfluß auf die Genauigkeit der Visur und zwar um so mehr, je stärker ein Fernrohr vergrößert. Jeder Punkt der Bildebene erscheint zu einem Oval mit lothrechter großer Achse verzerrt und der Gesamteindruck des Bildes ist wie von einem Fernrohr mit Kugelabweichung, nur daß die unaufhörliche Unruhe der Umrisse hinzutritt. Mit der Entfernung des Gegenstandes nehmen die Dimensionen des Ovals, im Maß der Ziellatte gedacht, zu und oft in mehr als einfachem Verhältniß. Da uns aber bis jetzt nichts als diese Lothschwankungen selbst von der heftigen Bewegung der unteren Luftschichten Kenntniß gibt und die Tageszeiten und Witterungsverhältnisse nur ganz im Allgemeinen zur Classification ihres Betrages dienen können, so kann das Bilderzittern kaum ein Gegenstand wissenschaftlicher Beobachtung werden und man muß sich mit der ungefähren Kenntniß des Maximalwerthes der Schwingungsamplitude begnügen, welcher für Entfernungen bis 100^m mit 20'' sicher nicht zu hoch gegriffen ist. STAMPFER hat es darum vermieden, die Lichtschwankungen in den Bereich seiner Versuche zu ziehen und dies durch Wahl einer kurzen Zieldistanz, welche nicht 30^m betrug und dem Erdboden ziemlich fern blieb, bei den schwachen Vergrößerungen vollkommen, bei den stärkeren fast erreicht. Für letztere wählte er nur trübe Tage und mit allen beobachtete er nur am Verticalfaden, wo die Störungen am geringsten sind. HIRSCH macht zu den angeführten Versuchen keine Bemerkung über das Wetter, weil es wohl selbstverständlich ist, daß er sich dazu günstige Verhältnisse aussuchte. Neben den früher angeführten Gründen genügen auch die größeren Entfernungen und die Ablefung an Horizontalfäden vollkommen zur Erklärung der stärkeren Zielfehler gegenüber STAMPFER. Denn auch dann, wenn die Bilder ruhig scheinen, ist es meist nur die unzureichende Kraft des Fernrohrs, welche ihr Zittern verbirgt. Mir scheint daher, daß die neueren Versuche jenen STAMPFER's nicht widersprechen, sondern sie ergänzen.

Der Umstand, daß die Unruhe der Bilder mit der Entfernung

wächst, weist auf Verkleinerung der Zielweiten als einfachstes Mittel gegen die damit verbundene Ungenauigkeit der Visur. Ein anderes folgt aus STAMPFER's Versuchen und hat noch nicht die verdiente Verwerthung gefunden. Wenn er das Objectiv so bedeckte, daß nur in der Mitte ein Kreis von der halben Linfenöffnung frei blieb, so bemerkten STAMPFER und seine Gefährten starke Verminderung des Visurfehlers ohne wahrnehmbare Zu- oder Abnahme der Deutlichkeit des Bildes. »Dennoch kann die Ursache dieser Erscheinung wahrscheinlicher Weise nur darin liegen, daß durch Verminderung des Durchmessers der Oeffnung die Klarheit und Präcision des Bildes, mithin auch die Schärfe der Visur erhöht wird, wenn Hintergrund und Beleuchtung des Object's von der Art sind, daß die verminderte Lichtstärke des Rohres keinen Nachtheil bringt.« Ausser den von STAMPFER angeführten Gründen für vermehrte Deutlichkeit des Bildes: die unvollkommene Homogeneität des Glases und ein Rest sphärischer Abweichung, läßt sich noch die Spiegelung an den Linfenwänden beziehen, welche secundäre Punktbilder namentlich aus den Randstrahlen erzeugt, deren Lage auch mit der Zielweite etwas wechselt. Diese Spiegelbilder gerathen bei Lichtschwankungen in noch weit stärkere Bewegung als die primären und wenn sie letzteren nahe, und hell genug sind, tragen sie nicht wenig zum Verzerren des Gesamtbildes bei. Vorzüglich um das Licht der secundären Bilder zu schwächen, wurden mit fühlbarem Erfolg den Ocularen der bayerischen Nivellirinstrumente hellblaue Blendgläser beigegeben. Eine der STAMPFER'schen nachgebildete Vorrichtung wird sich vermuthlich noch besser bewähren, weil sie nur die schädlicheren Randstrahlen dämpft. Versuche darüber auf verschiedene Distanzen wären wünschenswerth. *)

§. 19. Veränderungen in der Mittellage der Lichtstrahlen, das zweite Hinderniß fehlerfreier Visur, erfolgen zwar im Großen ziemlich stetig mit den Tageszeiten, sodaß die Refraction zweimal einen Minimalwerth erreicht, des Morgens gegen 10 und Nachmittags gegen 3 Uhr, wenn sich die Ausstrahlung der Erde und der Luft in einiger Entfernung vom Boden das Gleichgewicht halten. Von diesem stetigen Gang aber treten zahlreiche Abweichungen ein, oft für weite Strecken zugleich, durch Witterungswechsel veranlaßt und von Barometer-

*) Ein Theil der Irradiation und das Doppelt-Sehen kommen wahrscheinlich auf Rechnung der Spiegelung im Auge. Wenn die KrySTALLlinse im Augapfel etwas schief steht gegen die Achse des deutlichen Sehens oder die Verbindungslinie des optischen Mittelpunktes der Linse mit dem Mittelpunkt der reizbaren Netzhaut, so erhält diese ausser dem directen Bild eines hellen Punktes auch noch dessen schwächeres Spiegelbild — von den inneren Flächen der KrySTALLlinse — in etwas anderer Richtung als der des Hauptstrahls. Daraus, daß die Achse des deutlichen Sehens auf der Netzhaut etwas Spielraum hat, erklärt sich das zeitweise Verschwinden des Uebels, solange es nur gering ist. Bei normaler Stellung der KrySTALLlinse verstärkt das secundäre Bild die Erscheinung der Irradiation. — Eine sehr störende Wirkung nach Art der Irradiation übt die Spiegelung an den dünnen Strichnetzplatten aus, die man zuweilen statt der Fadenkreuze verwendet. Dicke Platten würden das secundäre Netzbild von dem der directen Strahlen weiter entfernen.

schwankungen begleitet, noch öfter und in rascherem Wechsel locale Aenderungen in Folge ungleich vertheilter Temperatur des Erdbodens. So rufen die langen Schatten der Gebirge gegen Abend frühzeitige Abkühlung hoher und ausgedehnter Luftmengen hervor, deren Ausgleichung mit den noch erwärmten unaufhörliche Refractionschwankungen veranlaßt, ohne daß sie sich durch eine Spur jenes auffallenden Zitterns ankündigten. Ganz ähnliche Erscheinungen zeigen sich in Tunnels, in tiefen Einschnitten etc., sind aber durchaus nicht bloß an solche Orte und an die Abendzeit gebunden, obwohl hier häufiger.

Daß die Wirkung der Refraction auf das Nivellement durch Aufnahme aus der Mitte aufgehoben werde, trifft demnach nur dann zu, wenn die Lichtlinie im Vor- und Rückblick symmetrisch gekrümmt ist und während der Aufeinanderfolge der Visuren keine Aenderung ihrer Lage erleidet. Da eine solche aber sehr leicht eintreten kann und es unmöglich ist beide Blicke zugleich aufzunehmen, so wurde in Bayern, wo mit doppelten Wechselfunkten nivellirt ward, die Reihenfolge der 4 Blicke eines Standes so angeordnet, daß nach dem ersten Rückblick die beiden Vorblicke, dann erst der zweite Rückblick kam. In der Differenz der Rückblicke sprachen sich dann wenigstens in zwischen eingetretene Refractionsänderungen aus und wenn man annimmt, daß sie der Zeit proportional erfolgten, so verschwindet ihr Einfluß wieder aus dem Mittel der Blicke. Man war natürlich vorsichtig genug sich auf diese letztere Annahme nicht völlig zu verlassen, sondern jede auffallende Differenz sofort durch Wiederholung zu untersuchen.

Gegen die Beobachtungen starker Differenzen, die sich auf vorbeschriebenen Gang der Messung gründen, (welcher aus unnöthiger Furcht vor der damit verbundenen Arbeitsverzögerung leider nicht von vorn herein angenommen wurde, obwohl seine Vortheile frühzeitig in die Augen fielen) ist eingewendet worden, daß sie nicht nothwendig auf Refractionswechsel hinweisen, sondern ebenfogat durch einseitige Erwärmung der Libelle erklärt werden. Aber auch, nachdem auf den Rath des schwedischen Ingenieurs Herrn BOERZELL, eines Specialisten für hypsometrische Arbeiten, die bayerischen Libellen über der Metallfassung noch durch halbrunde Glasdeckel geschützt waren, zeigten sich jene Differenzen ganz wie früher, unter Umständen, welche jeden Grund ungleicher Erwärmung des Instruments ausschlossen. So bei der Messung durch den etwa 1000^m langen Tunnel bei Heiligenbrücken (Aschaffenburg) und ganz besonders auffallend in einem beschatteten Eisenbahnanschnitt der Ulm—Kemptener Linie, spät am Nachmittag, wo bei scheinbarer Ruhe der Bilder und bei vollkommener Ruhe des Instruments in dreimaliger Wiederholung der Aufnahme die Visur des Rückblickes innerhalb 6 und 7,5", die des Vorblickes nur innerhalb 2—3" hin- und herschwankte (Zielweite 88^m), während sich gleichzeitig bei dem anderen thätigen Instrumente außerhalb des Anschnittes nicht die geringste auffallende Erscheinung zeigte und, nach Verkleinerung der Zielweiten, auch tiefer im Innern nur ganz geringe Beobach-

tungsfehler auftraten. Starke Aenderungen der Refraction sind auch an solchen Tagen nichts Seltenes, wo vereinzelt ziehende Wolken die Gegend zeitweise beschatten, und es liegt für uns kein Grund vor, an den zahlreichen Beobachtungen dieser Art mittelst der bayerischen Instrumente, welche beim Uebergang von Stand zu Stand durch einen Ueberzug und während der Aufnahme durch einen (gefütterten) Schirm geschützt waren, zu zweifeln.

Triftiger läßt sich einwenden, daß das Einschalten der Vorblicke zwischen beide Rückblicke, der Zeit nach, wohl die Aenderung der Refraction, nicht aber die Unsymmetrie der Lichtcurve im Vor- und Rückblick nachweise und es wäre eine ungenügende Erwiederung, daß Verschiedenheiten der Refraction auch mit raschem Wechsel derselben verbunden sein werden, weil die Atmosphäre alsbald nach einer Ausgleichung der Dichtigkeiten streben wird. Im Allgemeinen mag diese Anschauung richtig sein, ja sie findet durch die Erfahrungen des Professor BOERSCH zu Berlin, welcher das churheffische Nivellement ausführte, eine gewisse Bestätigung. Aber es lassen sich doch Fälle denken, wo Dichtigkeits- und Brechungsdifferenzen der Luft im Rück- und Vorblick auf längere Zeit constant bleiben und sich der Beobachtung nach bisheriger Weise durch Nichts zu erkennen geben. Um solche dauernde Abnormitäten zu bemerken, würde BOERSCH's Verfahren geeignet sein, welcher ebenfalls mit doppelten Wechselpunkten arbeitete, dieselben aber nicht neben einander legte, sondern in gleichen Abständen zwischen zwei Instrumentenstationen vertheilte. Sei e die Distanz der Wechselpunkte, $3e$ also die Entfernung von Stand M zu Stand N, γ der zum Bogen $3e$ gehörige bekannte Centriwinkel der Erde in Secunden, ϱ ihr Krümmungsradius, R der Radius der kreisförmig gedachten Lichtcurve zwischen beiden Stationen (sodafs $\frac{\varrho}{R}$ oder, wenn man will, $\varrho : 2R$ der Refractionscoefficient), so spricht sich für $R = \infty$ in der Differenz der Lattenstücke a und b , welche von beiden sich begegnenden zum Niveau der Erde tangentialen Visirlinien eingeschlossen werden, der Winkel γ aus, indem

$$\gamma = \frac{a-b}{206265e}.$$

Bekommt aber R einen endlichen Werth und nennen wir $\frac{1}{3}\lambda$ den Centriwinkel der Lichtcurve für die Bogenlänge e zwischen beiden Latten, so bildet die Sehne dieses Stückes der Lichtcurve mit der zugehörigen von M oder N ausgehenden Berührenden den Winkel $\frac{1}{2}\lambda$ und die beiden Sehnen unter sich den Winkel γ , zweimal um $\frac{1}{2}\lambda$ verkleinert. Von diesen Sehnen, oder was daselbe ist, von den beiden Lichtcurven, werden jetzt die Lattenstücke a_1 und b_1 abgeschnitten und man findet wie vorhin in Secunden:

$$\gamma - \lambda = \frac{a_1 - b_1}{206265e}$$

wobei wir, was erlaubt ist, e einmal für die Bogen-, das andre Mal für die Sehnenlänge gebrauchten. Der Refractionscoefficient wird hieraus gewonnen durch das Verhältniß c :

$$c = \lambda : \gamma = \varrho : R.$$

BOERSCH fand in dieser Weise die Gröfse c häufig im Rück- und Vorblick eines Standes verschieden, und die Fälle, in welchen er örtliche Unterschiede der Refraction constatirte (*Generalbericht über die europ. Gradm.* 1868), umschließen so ziemlich die gleichen äufseren Umstände, unter welchen in Bayern zeitliche Refractionsänderungen beobachtet wurden. Der oben gezogene Schluss von einer Erscheinung auf die andere wäre also durch die Erfahrung gerechtfertigt, wenn BOERSCH in der Lage gewesen wäre, seine Beobachtungen im Rück- und Vorblick gleichzeitig anzustellen, wozu 3 Instrumente erfordert werden, während er nur mit Einem arbeitete. So kann es sich denn treffen, dafs, wegen allmählicher Aenderung der Refraction, λ zwischen M und N verschieden von λ_1 zwischen N und O gefunden wird, obwohl die Lichtcurve in beiden Stationen vom Instrument aus symmetrisch gekrümmt war, aber auch das Gegentheil kann eintreten, wie denn weder das Verfahren von BOERSCH noch das bayerische eine absolute Probe für Symmetrie der Lichtcurve im Vor- und Rückblick gibt. Da aber der Abstand sehr flacher Curven von ihrer Tangente nahe mit dem Quadrat der Entfernung vom Berührungspunkte wächst, so wird die Unsymmetrie der Lichtcurve, wenn in keinem ihrer Aeste ein Wendepunkt vorkommt, Fehler in das Nivellement bringen, welche mit dem Quadrat der Zielweite wachsen. Verkleinerung der letzteren unter das Mafs, bei welchem örtliche Refractionsunterschiede noch schädlich sein können, ist das beste Gegenmittel und wie wir gesehen haben, auch gegen das störende Schwanken und Zittern der Bilder wirksam. Das Nivellement der Schweiz, schon durch die vorkommenden Steigungen zu kleinen Zielweiten von 40^m im Mittel gezwungen, mag darin einen Vorzug vor den deutschen Nivellements besitzen, der durch die Refractionscontrollen der letzteren — und sie sind nicht einmal allenthalben angewandt — kaum aufgewogen wird. Nivelliren mit kurzen Zielweiten und der bayerischen Controle, weil sie auch eine mögliche Veränderung in der Höhenlage des Instruments anzeigt und theilweise eliminirt, halte ich für das Beste.

§. 20. Wir haben uns im Vorgehenden schon überzeugt, dafs der wahrscheinliche Fehler in geometrischen Nivellements sich nicht allgemein durch ein constantes Winkelmafs wiedergeben läfst. Nur für den von der Libelle abhängigen Theil wäre dies nahezu ausreichend, wogegen der Winkelwerth des Ablefungsfehlers an der Latte nicht blofs mit der Individualität des Beobachters, sondern auch mit der Entfernung variirt und der durch die Refraction erzeugte Winkelfehler der Entfernung einfach proportional ist, aber mit der Witterung innerhalb weiter Grenzen wechselt. Später werden wir

noch von dem Einfluß mangelhafter Scalentheilung reden; sie veranlaßt einen Fehler, dessen absolutes Maß von der Entfernung unabhängig und dessen Winkelgröße ihr also verkehrt proportional ist. Die Angabe der wahrscheinlichen Beobachtungsfehler geometrischer Nivellements durch constante Winkel hat demnach bloß die Bedeutung von Functionswerthen, welche durch anderweitige Merkmale näher zu bezeichnen sind, beispielsweise dadurch, daß man sie als untere oder obere Grenzen jener Fehler betrachten kann. Für dasselbe Instrument, denselben Beobachter, gleiche Zielweiten und gleiche äußere Umstände sind jene Functionswerthe nothwendig gleich und da Höhenunterschiede zweier Fixpunkte durch Aneinanderreihen mehrerer Instrumentenstände und algebraisches Summiren der in jedem einzelnen beobachteten Höhenunterschiede der Wechselfuncte gefunden werden, so vergrößert sich unter vorgenannten Bedingungen das absolute Längenmaß des wahrscheinlichen Fehlers mit der Wurzel aus der Anzahl der Stationen oder mit der Wurzel aus der Entfernung zwischen zwei Fixpunkten.

Wenn nun unter sehr günstigen Witterungsverhältnissen, bei Windstille und vollkommen bedecktem Himmel, der Fehler im einzelnen Stand nur langsam mit der Entfernung wächst, so kann der Fall eintreten, daß für kleine Zielweiten z wegen der nothwendigen Vermehrung der Stände sich der Messungsfehler stärker summirt als für größere. Es muß sich dann, natürlich unabhängig von der Länge der nivellirten Strecke, eine Zielweite z_0 finden lassen, welche die kleinste Fehleranhäufung veranlaßt. Nehmen wir an, es sei aus der Interpolation von Versuchswerthen die empirische Fehlergleichung gefunden worden:

$$x = a + b \sqrt{z} + cz$$

worin x den wahrscheinlichen Fehler eines Blickes, a ; b und c Constanten bedeuten, so ist das Quadrat des Fehlers M , welcher sich im Nivellement ansammelt, einerseits proportional x^2 , andererseits der Anzahl Blicke $\frac{1}{z}$, welche auf die Längeneinheit treffen. M^2 und damit

M wird demnach am kleinsten für $\frac{x^2}{z} = \text{Minimum}$ und in unfrem

Beispiele für

$$z_0 = \frac{a}{c}.$$

Dies für das einfache Nivellement. Bei m Wiederholungen der Aufnahme mit gleichen Zielweiten und unter gleicher Gunst des Wetters ist das Mittel der gefundenen Höhenunterschiede ihr wahrscheinlichster Werth und dessen wahrscheinlicher Fehler verkehrt proportional $\sqrt{m}$. F. HELMERT in Aachen hat in seiner *Ausgleichungsrechnung nach der Meth. d. kl. Qu.* (Leipzig 1872) die Frage behandelt, ob es bei gleichem Aufwand von Mühe nicht vortheilhafter sei, größere Zielweiten als z_0 zu wählen, dafür aber die Aufnahme

mehrmals zu wiederholen. Da nämlich die Mühe der Gesamtzahl der Stände, also auch der Vor- und Rückblicke, nahezu proportional ist, so wächst sie mit dem Produkt $\frac{1}{z} m = k$, wo dasselbe k sich auf die verschiedenste Weise aus z und m zusammensetzen läßt, während sich das Quadrat des Nivellementfehlers M , der m Wiederholungen halber, nur mit $\frac{x^2}{mz}$ aufhäuft, und wenn m durch k ausgedrückt wird,

mit $\frac{x^2}{z^2 k}$. Dieser Ausdruck wird in unfrem Beispiele ein Minimum

für $z, = \frac{4a^2}{b^2}$; z , ist somit die Zielweite, welche die auf das Nivellement

verwendete Mühe am besten verwerthet und wie man in allen Fällen leicht sieht, für jeden Werth von k gleich groß. Fragt man noch, wie die auf das einmalige Nivellement mit der Zielweite z_0 verwendete

Mühe am vortheilhaftesten verwerthet wird, so hat man $\frac{1}{z_0} = \frac{m}{z} = k$

zu setzen und findet die Anzahl der Wiederholungen $m = \frac{4ac}{b^2}$ als

die nützlichste. Prof. HELMERT beantwortet diese Fragen a. a. O. an einem aus HAGEN's Wahrscheinlichkeitsrechnung geschöpften Zahlenbeispiele.

So großen Werth nun solche Deductionen für Erweiterung des Ueberblicks haben: zur unmittelbaren Anwendung sind sie wenig brauchbar, weil, wie mehrfach erwähnt, die wahrscheinlichen Beobachtungsfehler nur selten den gemachten Voraussetzungen entsprechen und aus äusseren Zeichen nicht mit Sicherheit auf ihre Grösse geschlossen werden kann. Es ist also besser, die Zielweite den Umständen anzupassen und als Prüfstein dafür, daß der gewünschte wahrscheinliche Zielfehler eingehalten wird, den wirklich begangenen Beobachtungsfehler so oft als möglich zu ermitteln, Grenzüberschreitungen aber durch Wiederholung der Aufnahme zu corrigiren. Setzt man nach dem von der internationalen Conferenz geodätischer Commissäre zu Berlin 1864 adoptirten Vorgange der Schweiz $\sqrt{10}$ Millimeter pro Kilometer als zulässige Fehlergrenze fest, so darf der einzelne Visur-

fehler $\sqrt{\frac{10z}{1000}}$ Millimeter oder $\sqrt{z}$ Zehntelmillimeter nicht überschreiten.

Die Differenz zweier Blicke darf hiernach nicht um mehr als $\sqrt{2z}$ Zehntelmillimeter falsch sein und diese Grösse bestimmte in Bayern Anfangs die Zulässigkeit einer Aufnahme. Später wurde die Grenze enger gezogen und seit Herbst 1869, namentlich um den Einfluß der bei großen Zielweiten so gefährlichen Unsymmetrie der Lichtcurve zu beschränken, $\sqrt{z}$ dmm als Grenzfehler eingehalten, wodurch sich die durchschnittliche Zielweite um 10^m , nämlich von 70 auf 60^m verminderte.

Für einen sehr sorgfältig gearbeiteten Nivellirapparat könnte man die Fehlergrenze, ohne den Aufwand an Mühe unmäfsig zu vergröfsern, leicht noch weiter herabsetzen.

Für den bayerischen Apparat läfst sich die Vermehrung der Arbeit mit der Verkleinerung der Fehlergrenze auf folgende Weise finden: Die angeführten Durchschnittszielweiten sind das zuverlässige Ergebnifs mehrerer tausend Stände und legen demnach Zeugnifs ab von dem raschen Wachsthum der Visurfehlers y mit der Zielweite, in dem Fall nämlich, dafs nicht blos bei dem günstigsten Wetter gearbeitet wird. Setzen wir ihn vorerst dem Quadrat der Zielweite proportional, fodafs

$$y = mz^2 \quad (31)$$

wird, so berichtigt sich diese Annahme sogleich, wenn wir den Factor m einmal für die gewählten Fehlergrenzen bestimmen, welche zwar ganz willkürliche Fehlerwerthe darstellen, aber die vortheilhafte Eigenschaft besitzen, den uns vorläufig unbekannten wahrscheinlichen Beobachtungsfehlern proportional zu sein. Wir finden aus den beobachteten Durchschnittszielweiten z und den zugehörigen Fehlergrenzen y :

$$\begin{aligned} \sqrt{z} &= m \times 3600; & m &= \sqrt{z} : 3600 \\ \sqrt{2z} &= m \times 4900; & m &= \sqrt{z} : 3465 \end{aligned}$$

also zwei sehr nahe übereinstimmende Werthe. Nehmen wir den Mittelwerth $m = \sqrt{z} : 3533$ in Rechnung, so haben wir allgemein für die Fehlergrenze statt (31) zu setzen:

$$y = \sqrt{z} \frac{z^2}{3533} \quad (32)$$

Würde man $y = \sqrt{\frac{z}{2}}$ dmm als Grenze bestimmen, so berechnete sich die neue Durchschnittszielweite sehr nahe zu 50^m und die Arbeit würde sich gegen jene bei der Fehlergrenze $\sqrt{z}$ dmm im Verhältnifs 6:5 vermehren.

Das natürliche Streben, die Arbeit durch grofse Stände, also mit möglichst geringer Mühe zu fördern, hat auch das bayerische Nivellement beherrscht, aber nicht unbeschränkt, sondern wie wir sahen, mit strenger Beachtung eines für die Fehler geltenden Gesetzes. Wir schliessen daraus, dafs jede Verminderung der Zielweite *unter* ihre Durchschnittszahl z_0 eine Grenzüberschreitung andeutet für den Fall, dafs man z_0 beibehalten hätte. Umgekehrt bedeutet die Ausdehnung der Zielweite *über* z_0 , dafs für z_0 der Fehler unter der zulässigen Grenze geblieben wäre. Für den Fall, dafs z_0 nicht nur die Durchschnittszahl aller angewandten Zieldistanzen, sondern zugleich jene Distanz ist, welche alle vorgekommenen gröfseren und kleineren Zielweiten in zwei Gruppen von gleicher Anzahl scheidet, — und das trifft nahe genug zu — für diesen Fall ist die vorgeschriebene Fehlergrenze der *wahrscheinliche* Fehler, welcher sich ergab, wenn mit der

constanten Zielweite z_0 unter denselben Umständen nivellirt wurde, die das wirkliche Nivellement mit seinen variablen Zieldistanzen begleiteten. Es läßt sich also folgender Satz, freilich nicht mit der Strenge eines Naturgesetzes, aussprechen: Wenn ohne ängstliche Rücksicht auf die Witterung und selbst unter ziemlich ungünstigen Umständen mit beliebigen Zielweiten nivellirt wird, so ergibt der bayerische Nivellirapparat wahrscheinliche Fehler y , deren Quadrate mit den fünften Potenzen der Zielweite wachsen und deren Betrag in Decimillimetern aus Gleichung (32) zu entnehmen ist. Für $100^m = z$ fänden wir z. B. $y = 28,3$ dmm, also fast 3^m , oder in Winkelmaß $5,84''$ *).

§. 21. Ganz verschieden von diesen Ergebnissen für beliebige Zielweiten sind die wahrsch. Visurfehler, welche im Gefolge der gesetzlich beschränkten Distanzen auftreten. Es ist nicht ohne Interesse zu untersuchen, ob sie wirklich, der Bedingung gemäß, proportional zur Wurzel aus der Entfernung ausgefallen sind, und welcher Fehler der Beobachtungseinheit anhaftet, also beispielsweise der Zielweite 100^m und der einzelnen Fadenablesung. Meine vormalige Betheiligung am bayr. Präcisions-Nivellement setzte mich in den Stand sämmtliche, auf die früher beschriebene Weise ermittelten Zielfehler der Jahre 1868—71 zu sammeln. Die nachfolgende Berechnung stützt sich jedoch nur auf die Ergebnisse von 1870/71, weil für den größeren Theil der früheren Aufnahme noch die Fehlergrenze $\sqrt{2z}$ galt, hier aber nur Homogenes verbunden werden darf. Es sind ferner ausgeschieden die Blicke, welche zur Anknüpfung an Fixpunkte dienten. Zwar sind auch diese doppelt aufgenommen, aber, um nicht beide Male den gleichen Schätzungsfehler zu begehen, mit starken Libellen-Ausschlägen von entgegengesetztem Vorzeichen. Da nun ihr Mittelwerth gut, ihre Differenz aber bei hohen und niederen Temperaturen von dem wechselnden Theilwerth der Libelle deutlich beeinflusst ist, so kann sie nicht, wie die andern Differenzen zweier Blicke, einen Maßstab für den Messungsfehler abgeben. — Andererseits wurden auch solche Zielfehler beibehalten, welche zur Wiederholung der Blicke Veranlassung gegeben hatten, wenn dies nämlich auch bei Berechnung des Nivellements geschehen war. Denn um hierbei Willkür zu vermeiden, ist, wenn die zweite oder dritte Wiederholung eines Standes guten Erfolg gehabt hat, niemals die erste Aufnahme verworfen, sondern alle zu einem Mittel vereinigt worden, es sei denn, daß man sich überhaupt genöthigt sah, die Zielweite sofort zu verkleinern, also den Stand des Instrumentes

*) So für die Summe oder Differenz zweier Blicke; für deren arithmetisches Mittel bloß die Hälfte obiger Zahlen, also $\frac{y}{2} = 14,15$ dmm oder $2,92''$; dagegen trifft auf jeden Blick einzeln der wahrsch. Fehler $\frac{y}{\sqrt{2}} = 20,0$ dmm oder $4,13''$; und da jeder Blick aus 3 Fadenablesungen besteht, auf jede solche der Fehler $y \sqrt{\frac{3}{2}} = 34,6$ dmm oder $7,15''$; alles dies, wenn $z = 100^m$.

zu ändern. — Das letztere geschah zuweilen mit gutem Erfolg blos im vertikalen Sinne, namentlich dann, wenn die erste Wiederholung nahezu übereinstimmende Grenzüberschreitung zeigte; oft genügte nun ein geringes Verschrauben der Füße um wenige Centimeter zur Beseitigung der Fehler, als Beweis dafür, daß Mängel der Centimetertheilung die Schuld an dem Aufenthalt trugen. Da nun aber die Fehler der Scalentheilung auf alle Blicke einwirken, so liegt kein Grund vor, einzelne deutlicher hervortretende Beträge auszuschließen. — Dasselbe gilt von den Wirkungen der Refraction, so lange sie nur vereinzelte Abnormitäten hervorrief. Die Zielfehler des bayerischen Präcisions-Nivellements spiegeln also alle bisher erwähnten zufälligen Fehler geometrischer Nivellements ab, sind demnach Zielfehler im erweiterten Sinne, jenen gegenüber, die nur als Ausdruck unzureichender Kraft des Fernrohrs und mangelhaften Schätzungsvermögens gelten können, wie die Visurfehler der STAMPFER'schen Versuche.

Erinnern wir uns, daß die bayer. Visurfehler aus dem Vergleich eines genau bekannten Lattenstückes mit der Differenz zweier Fernrohrmessungen gewonnen wurden, welche selbst wieder Mittelwerthe aus je 3 Fadenablesungen sind, so hat die Reduction auf den einzelnen Faden durch den Factor $\sqrt[3]{2}$ zu erfolgen *). Nach der Quadrirung wurden sie in Gruppen vereinigt, deren Grenzen aus später erhellenden Gründen nicht nach Metern der Zielweite, sondern nach Centimetern der Lattenabschnitte zwischen den äußeren Fäden, einer einfachen Function der Zielweite, bemessen sind, sodafs alle Fehlerquadrate, welche zu den Abschnitten zwischen $(x - 0,5)^{\text{cm}}$ und $(x + 0,5)^{\text{cm}}$ gehören, summiert und durch ihre Anzahl p dividirt wurden, wo x eine ganze Zahl zwischen 20 und 66 pro 1870 und zwischen 20 und 64 pro 1871 bedeutet. Um den wahrscheinlichen Zielfehler φ einer Distanz statt dem mittleren zu erhalten, wurde das Quadrat des letzteren mit $0,6745^2$ multipliziert und diese Zahlen φ^2 schließlic mit der freilich übertriebenen Genauigkeit von 4 Decimalstellen der Ausgleichung zu Grunde gelegt. Da wir hiebei die Jahre 1870 und 71 theilweise getrennt behandelt haben, so mögen dies die Zeiger 0 und 1, an die üblichen algebraischen Symbole angehängt, aussprechen, so daß beispielsweise

$$[p]_0 = 3936; [p]_1 = 6435; [p]_{0/1} = 10371$$

die Anzahl der vereinigten Fehlerquadrate pro 1870, 1871 und 1870/71 angibt. Hier folgen die Zahlen φ^2 , auf zwei Decimalstellen abgerundet, mit ihren Gewichten p . Die Fehler φ sind in Decimillimetern zu verstehen.

*) Bei dieser Vertheilung des Gesamtfehlers auf die einzelnen Fadenablesungen sollte eigentlich der Libellenfehler ausgeschieden werden, der sich nicht, wie die übrigen, bei jeder Fadenschätzung aufs Neue einstellt, sondern dem Mittel der 3 Fäden eines Blickes zufällt. Wir können jedoch nur seine Grenzen, nicht seinen wahrscheinlichen Betrag beurtheilen und müssen darum auf die fragliche Trennung verzichten. In Folge dessen wird der wahrsch. Fehler der einzelnen Fadenablesung etwas zu klein.

1870			1871		
x	φ^2	p	x	φ^2	p
20	23,33	9	20	4,81	19
21	4,27	10	21	5,10	14
22	9,58	16	22	7,94	21
23	5,05	14	23	5,73	15
24	5,05	7	24	5,03	20
25	2,80	5	25	6,61	12
26	9,76	11	26	7,33	40
27	8,62	26	27	7,85	57
28	19,05	14	28	7,59	13
29	3,28	13	29	7,08	26
30	8,09	15	30	6,97	29
31	5,73	51	31	4,70	89
32	15,78	27	32	13,31	28
33	8,10	28	33	8,14	52
34	9,55	34	34	8,16	37
35	12,51	47	35	10,44	357
36	12,22	192	36	10,94	294
37	19,27	30	37	12,43	191
38	15,52	29	38	15,35	33
39	7,57	118	39	7,65	44
40	13,65	386	40	13,00	250
41	12,42	99	41	11,24	543
42	10,92	24	42	10,99	114
43	12,34	145	43	14,19	218
44	20,95	188	44	14,65	404
45	10,18	383	45	12,81	1118
46	13,57	31	46	19,35	104
47	14,71	78	47	14,22	312
48	16,08	234	48	17,29	168
49	13,78	204	49	14,44	585
50	16,84	111	50	22,08	182
51	6,04	18	51	14,47	137
52	22,80	141	52	17,91	93
53	15,80	99	53	12,43	69
54	19,07	353	54	19,73	180
55	15,19	28	55	17,26	96
56	27,16	80	56	16,54	58
57	27,60	20	57	16,45	67
58	14,68	103	58	17,94	83
59	14,03	77	59	13,13	125
60	21,41	122	60	9,17	4
61	13,43	86	61	96,00	1
62	12,76	41	62	41,88	17
63	15,43	160	63	13,32	79
64	6,53	15	64	48,77	37
65	19,64	11			
66	20,67	3			

Wenn es gelungen ist, die wahrscheinlichen Fehler φ des Nivellements der Wurzel aus der Zielweite z proportional zu machen, also auch (nahezu) der Wurzel aus den Lattenabschnitten x , so lassen sich die vorstehenden Fehlerwerthe durch die Gleichung

$$\varphi^2 = A x \quad (33)$$

interpoliren. Da man jedoch a priori nicht wissen kann, ob die mit dem Quadrate von z wachsenden atmosphärischen Einflüsse etwa bewirkt haben, daß die den größeren Zielweiten zugehörigen Fehler, absolut genommen, sich mehr an ihrer äußeren als inneren Grenze anhäufen, so wurde zuerst mittelst der etwas allgemeineren Gleichung

$$\varphi^2 = A x + B x^2 \quad (34)$$

nach der Methode der kl. Qu. ausgeglichen und es fand sich:

$$\varphi_0^2 = + (0,3968 \pm 0,049706) x - (0,001662 \pm 0,00097455) x^2$$

$$\varphi_1^2 = + (0,2116 \pm 0,050014) x + (0,002126 \pm 0,00105568) x^2$$

$$\varphi_{0/1}^2 = + (0,29637 \pm 0,034544) x + (0,0003233 \pm 0,00070649) x^2$$

Die wahrsch. Unsicherheiten σ der Fehlerbestimmung mittelst dieser Gleichungen sind, auf Gewichtseinheit bezogen, der Reihe nach in $\square^{\text{dmm}}$:

$$\sigma_0 = 24,657; \quad \sigma_1 = 27,836; \quad \sigma_{0/1} = 26,438!$$

Der Umstand, daß das zweite Glied der Interpolationsformel einmal positiv, das andere Mal negativ auftritt und in der Formel für 70/71 fast verschwindet, macht seine Berechtigung sehr zweifelhaft, zumal auch die wahrscheinlichen Unsicherheiten des zweiten Gliedes unmäßige Werthe erreichen. Wir kehren also zu der einfacheren Gleichung (33) zurück und finden:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_0^2 &= (0,313195 \pm 0,008334) x; \quad \sigma_0 = 25,016 \\ \varphi_1^2 &= (0,311052 \pm 0,007891) x; \quad \sigma_1 = 28,432 \\ \varphi_{0/1}^2 &= (0,311930 \pm 0,005639) x; \quad \sigma_{0/1} = 26,446! \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

Die Uebereinstimmung der Coefficienten unter sich, welche noch nicht um ein Drittel des wahrscheinlichen Fehlers von einander abweichen, beweist genug für die Richtigkeit der gewählten Interpolationsformel (33), sowie daß die Fehlereinschränkung in beiden Jahren 1870 und 71 fast gleich günstigen Erfolg hatte und die wahrscheinlichen Zielfehler in der That mit der Wurzel aus der Zielweite wachsen. — Durch Ausziehen der Wurzel verwandeln sich die Gleichungen (35) in

$$\left. \begin{aligned} \varphi_0 &= (0,559639 \pm 0,007446) \sqrt{x} \\ \varphi_1 &= (0,557721 \pm 0,007074) \sqrt{x} \\ \varphi_{0/1} &= (0,558507 \pm 0,005048) \sqrt{x} \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

und deren Coefficienten wollen wir durch $\sqrt{1,37}$ dividiren, um die Lattenabschnitte x (Centimeter) durch Zielweiten z (Meter) zu ersetzen, wobei wir der Zahl 1,37 (*S. oben p. 38*) den wahrscheinlichen Irrthum 0,00362 zuschreiben, welcher bei der Berechnung der Unsicherheiten im Folgenden berücksichtigt worden ist. So erhält man:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_0 &= (0,478132 \pm 0,006393) \sqrt{z} \\ \varphi_1 &= (0,476493 \pm 0,006076) \sqrt{z} \\ \varphi_{0/1} &= (0,477166 \pm 0,004359) \sqrt{z} \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

Will man den wahrscheinlichen Zielfehler s in Secunden statt φ in dmm haben, so brauchen wir vorstehende Gleichung nur mit dem Factor $(20,6265 : z)$ zu multipliciren und haben:

$$s_{0/1} = (9,84226 \pm 0,13187) \frac{1}{\sqrt{z}} \quad (38)$$

Setzen wir $z = 100^m$, so wird s sehr nahe $1''$. Wir sind nicht berechtigt, den wahrscheinlichen Fehler für grössere Zielweiten kleiner anzunehmen als $1''$, weil solche nicht vorgekommen sind, offenbar wegen der Unmöglichkeit bei grösseren Ständen die festgesetzten Fehlergrenzen einzuhalten. Die vorstehenden Gleichungen gelten denn auch nicht für gleich günstige Witterungsverhältnisse, sondern sie sind die Probe gleich günstiger Resultate bei den verschiedensten äusseren Umständen. Die obere Grenze unsrer Zielweiten bezeichnet also auch eine Genauigkeitsgrenze. Die untere Grenze der Genauigkeit, bei welcher wir die Arbeit als zu unsicher und zu wenig lohnend abbrechen, ist sehr nahe $2''$. Für Mittelwerthe aus m Wiederholungen oder für die Ablefung an m Fäden sind die vorstehenden Zahlen mit $\sqrt{m}$ zu dividiren, sodafs aus (37) und (38) kurz folgt:

$$\varphi_{0/1} = 0,477 \sqrt{\frac{z}{m}} \quad (39)$$

und

$$s_{0/1} = 9,84 \frac{1}{\sqrt{mz}} \quad (40)$$

Berechnet man nach der STAMPFER'schen Regel, dafs die Visurfehler umgekehrt mit der Vergrößerung wachsen, den Minimalfehler Φ der Schweizer Instrumente aus dem wahrsch. Minimalfehler $1''$ und der Vergrößerung 33 für die bayerischen, so hat man $42:33 = 1:\Phi$ und $\Phi = \frac{11}{14} = 0,79''$; man vergleiche damit die angeführten Schweizerischen Versuchswerthe. (S. pag. 42.)

Wenn, wie wir früher behaupteten, die Fehler im Schätzen der Centimeterbruchtheile sich theilweise compensiren, sobald alle 3 Fäden an verschiedenen Centimeterstellen liegen, so müssen in jenen Fehlergruppen, welche sich um die Lattenabschnitte von gerader Centimeterzahl lagern, im Durchschnitt grössere Werthe vorkommen als in den übrigen. Denn bei solchen Lattenabschnitten treffen alle 3 Fäden an dieselbe Stelle des Centimeters und die Schätzungsfehler fallen im gleichen Sinne aus; dadurch, dafs der zweite Blick bei der bayerischen Einrichtung der Fufsplatten in der anderen Centimeterhälfte genommen wird, treten die Gegensätze der Schätzung scharf hervor. (Bayr. Präc. Niv. I, 16). Wir haben die Gruppen der geraden und ungeraden

Zahlen getrennt ausgeglichen und die volle Bestätigung gefunden. Da aber gerade Zahlen bei der Aufnahme 1871 schon nach Möglichkeit vermieden wurden, so haben die betreffenden Formeln ein geringeres Gewicht erhalten als jene für die Gruppen der ungeraden Zahlen. Es fand sich:

$$\begin{aligned} \text{ger. } \varphi_0^2 &= (0,356002 \pm 0,010725) x; [p]_0 = 2186; \sigma_0 = 23,959 \\ \text{unger. } \varphi_0^2 &= (0,260040 \pm 0,007985) x; [p]_0 = 1750; \sigma_0 = 16,007 \\ \text{ger. } \varphi_1^2 &= (0,363464 \pm 0,014039) x; [p]_1 = 2228; \sigma_1 = 29,803 \\ \text{unger. } \varphi_1^2 &= (0,283188 \pm 0,006086) x; [p]_1 = 4207; \sigma_1 = 17,720 \\ \text{ger. } \varphi_{0/1}^2 &= (0,359543 \pm 0,008666) x; [p]_{0/1} = 4414; \sigma_{0/1} = 26,707 \\ \text{unger. } \varphi_{0/1}^2 &= (0,275743 \pm 0,004843) x; [p]_{0/1} = 5957; \sigma_{0/1} = 17,121 \end{aligned}$$

Auch hier überrascht die Harmonie zwischen den sich entsprechenden Werthen beider Beobachtungsjahre. Wir übergehen die Auf-
führung der Wurzelwerthe und fügen nur noch deren Verwandlung
in Metermafs bei, welche wie oben geschah und ergab:

$$\begin{aligned} \text{ger. } \varphi_0 &= (0,50976 \pm 0,00772) \sqrt{z} \\ \text{unger. } \varphi_0 &= (0,43567 \pm 0,00672) \sqrt{z} \\ \text{ger. } \varphi_1 &= (0,51508 \pm 0,00998) \sqrt{z} \\ \text{unger. } \varphi_1 &= (0,45465 \pm 0,00493) \sqrt{z} \\ \text{ger. } \varphi_{0/1} &= (0,51229 \pm 0,00623) \sqrt{z} \\ \text{unger. } \varphi_{0/1} &= (0,44864 \pm 0,00400) \sqrt{z} \end{aligned}$$

Verwandeln wir endlich die beiden letzten in Secundenmafs, so zeigt sich:

$$\begin{aligned} \text{ger. } s_{0/1} &= (10,5667 \pm 0,1284) \frac{1}{\sqrt{z}} \\ \text{unger. } s_{0/1} &= (9,2540 \pm 0,0825) \frac{1}{\sqrt{z}} \end{aligned}$$

§. 22. Ueberblickt man das Vorangegangene, betrachtet man namentlich die Gleichungen (39) und (40), so sollte man denken, dafs es ein Leichtes sei, den Gang eines Nivellements so anzuordnen, dafs jeder beliebige Genauigkeitsgrad erreicht wird. Denn die angeführten Gleichungen, welche auch dann noch gelten, wenn sich z aus einer Reihe von Ständen zusammensetzt, also für jede beliebige Entfernung, versprechen auf 10 Kilometer Nivellement erst den wahrsch. Fehler von noch nicht 5^{mm} , und das wenn nur einfach und nur mit Einem Horizontalfaden im Fernrohr nivellirt wird, also $m = 1$ ist. Indem man m vermehrt oder die zulässige Fehlergrenze herabsetzt, läfst sich der Fehler noch bedeutend vermindern und zwar, wie aus (39) hervorgeht, im umgekehrten Verhältnifs mit $\sqrt{m}$ und, wie sich erwarten läfst, im directen Verhältnifs mit der Fehlergrenze, die wir durch $\sqrt{\vartheta z}$ dmm ausdrücken wollen. Da oben $\vartheta = 1$ war, so erhalten wir

aus dem speciellen Fall allgemeine Ausdrücke, wenn wir die Gleichungen (39) und (40) mit $(\sqrt{gz} : \sqrt{z})$ multipliciren, also

$$\varphi = 0,477 \sqrt{\frac{gz}{m}} \text{ (Dezimillimeter)} \quad (41)$$

$$s = 9,84 \sqrt{\frac{g}{mz}} \text{ (Secunden)} \quad (42)$$

Aber bis jetzt wurde ganz abgesehen von einer Fehlerquelle, welche sich zwar in dem kurzen Lattenstückchen von $3\frac{1}{2}$ cm Länge, das zur Bestimmung der bayerischen Zielfehler diente, zum Glück nicht wesentlich geltend machen konnte, welche aber gleichwohl auf die durch Nivellement ermittelten Höhenunterschiede den grössten Einfluss übt: nämlich das ungleiche Mafs der Zielscalen. Die Einheit des Mafses ist bei den mitteleuropäischen Präcisionsnivellements in mehrfacher Hinsicht nicht streng genug durchgeführt, ja zu Anfang mit einer gewissen Sorglosigkeit behandelt worden. Ich rede nicht davon, dafs man Theile des Netzes in Toisen, andere in Wiener Klaftern ausgeführt hat; diese — allerdings überflüssigen — Ungleichheiten sind durch Rechnung zu beseitigen. Aber man hat sich zu sehr auf die Sorgfalt der Mechaniker einerseits und auf die Unveränderlichkeit der Holzfaserlänge andererseits verlassen und, da man von Beidem innerhalb der Genauigkeitsgrenzen früherer Nivellements auch hinreichend überzeugt war, diese Ueberzeugung ohne Weiteres auf die Präcisionsnivellements übertragen. Unter Voraussetzung vollkommener Scalentheilung und constanter Lattenlänge würde es freilich genügen, irgend ein Stück der Scala, vielleicht auch ihre ganze Länge, mit dem Normalmafs zu vergleichen und daraus eine Reduction abzuleiten, welche für alle Temperaturen und atmosphärischen Feuchtigkeitsgrade gilt und den gemessenen Höhenunterschieden einfach proportional ist. Nun hat aber HIRSCH nicht blos eine ganz bemerkliche Veränderlichkeit der Lattenlänge nachgewiesen, sondern es kann sich auch Jeder leicht von der Ungleichheit der inneren Scaleneintheilung überzeugen, wenn diese aus freier Hand gemacht ist; selten wird es zu dieser Erkenntnifs erst einer strengeren Probe bedürfen.

Wahrscheinlich um den grofsen Nachtheilen der Handarbeit zu entgehen, suchte man in Frankreich, wie das *Niv. de préc. de la Suisse* uns mittheilt, Uebereinstimmung und Correctheit der Scalentheilungen dadurch zu erreichen, dafs man deren Conturen mittelst einer metallenen Schablone auf alle Latten aufdruckte. Wenn man auch, wie wenigstens die angeführte Schrift zu vermuthen scheint, bei diesem Vorgange auf die Ausdehnung des Metalles Rücksicht genommen hat, auf die Veränderlichkeit der Lattenlänge während dem Nivelliren ist sicher keine genommen worden. Bei der Berechnung hat man vorausgesetzt, dafs allen in Frankreich geometrisch gemessenen Höhenunterschieden das gleiche Mafs zu Grunde liege. — In den meisten andern Ländern überliefs man die Anfertigung der Scalen für

jede einzelne Latte dem Mechaniker und dieser nicht immer seinem sorgfältigsten Gehülften. Die Mehrzahl dieser Latten ist daher wohl, wie die bayerischen, auf primitive Art mit dem Zirkel getheilt und zeigt im besten Falle die unvermeidlich damit verknüpften Ungleichheiten der Centimeter und Abweichungen der grösseren Lattenstücke vom Normalmafs. Man war sich daher wohl mehr als in Frankreich bewußt, dafs diese Latten einer nachträglichen Mafsvergleichung bedurften.

WEISBACH nahm mit den sächsischen Latten eine solche vor, indem er dieselben der Reihe nach auf Pflöcke von verschiedenen Höhen, aber in gleichem Abstand vom Nivellirinstrument, stellte und deren Höhenunterschied bestimmte. Eine der so untersuchten Latten wurde nicht weiter in Gebrauch gegeben, sondern für die spätere Vergleichung mit dem Normalmafs aufbewahrt. In der Schweiz mußte man sich Anfangs auch mit diesem relativen Vergleich begnügen, wählte aber statt der Pflöcke zwei in Fels eingelassene Bronzeplatten, durch deren unveränderlichen Höhenunterschied die Reservelatte mehr als ersetzt war. Auch bot sich schon im zweiten Jahr des Nivellements Gelegenheit zu einer Vergleichung auf dem Comparator, mittelst Mikroskopen, welche den früheren relativen Vergleich (durch das Nivellirinstrument) bestätigte. Während man aber bei diesen ersten Untersuchungen eine Veränderlichkeit der Lattenlängen noch nicht beobachten konnte, gaben spätere Wiederholungen dazu hinreichende Gelegenheit. Das *Niv. de préc. III* gibt p. 180 folgende Zusammenstellung der Meterlänge, welche Ergebnisse auf dem Berner Comparator durch den mehrmaligen Vergleich der beiden 3^m langen Latten mit einem 2,9^m langen eisernen Normalstab gewonnen und auf die Mafseinheit reducirt wurden:

		Latte I		Latte II	
		^m	⁰	^m	⁰
1767	18. März	1,000706	bei 14,1 C;	1,000302	bei 15,0 C
68	20. April	493	» 9,9 »;	131	» 10,1 »
68	7. Mai	562	» 17,8 »;	179	» 17,9 »
69	15/20. »	607	» 19,1 »;	214	» 20,4 »
69	20/21. »	700	» 18,0 »;	318	» 17,9 »
70	21/22. »	778	» 10,1 »;	433	» 11,4 »

Mittel der 6 Bestimmungen $1,000641 \pm 0,029^{\text{mm}}$; $1,000263 \pm 0,030^{\text{mm}}$

Die wahrscheinliche Unsicherheit der Annahme dieser Mittelwerthe für irgend einen beliebigen Zustand der Latten beträgt 0,071 und 0,074^{mm}. Die Reduction auf gleiche Temperatur mittelst des Ausdehnungscoefficienten für Holz $5 : 10^6$ (nach KATER) veränderte an dieser Unsicherheit der Werthe äußerst wenig, ebenso zeigte sich die Lattenlänge fast unabhängig von dem Grade der Luftfeuchtigkeit, auch weist HIRSCH die Unmöglichkeit zeitweiser Biegungen von solchem Betrage nach, dafs sie zur Erklärung der Veränderlichkeit der Längen ausreichen. So sieht er denn kein anderes Mittel um deren schädlichen Einfluß auf das Nivellement zu vermindern, als einestheils häufig

wiederholte Mafsvergleichen, wodurch wenigstens die mittlere Länge annähernd festgestellt würde, anderntheils Berücksichtigung dieser Unsicherheit bei Feststellung der Gewichte der Polygonseiten. Da dieser Fehler den gemessenen Höhenunterschieden proportional und keineswegs von der Art ist, dafs er sich durch Rückkehr zum Ausgangsniveau eliminirte (man beachte seine rasche Aenderung im Jahr 1868), so nimmt ihn das Nivellement der Schweiz proportional der Summe aller Höhenunterschiede an, aus welchen sich eine Polygonseite zusammensetzt.

Offenbar verlangen alle Latten von ähnlichen Eigenschaften die gleiche Vorsicht, sobald die Höhenunterschiede der nivellirten Gegend einigermaßen beträchtlich sind. Denken wir uns beispielsweise die bayerischen Latten der gleichen Veränderlichkeit unterworfen, wie jene der Schweiz, so läfst sich für regelmässige Steigungen, wie sie auf langen Strecken der Eisenbahnen vorkommen, berechnen, auf welche Distanz die wahrscheinliche Unsicherheit der Lattenlänge den wahrscheinlichen Zielfehler erreichen wird. Steigt das Terrain im Verhältnifs $1 : q$ mit der Entfernung z , so wird $\frac{z}{q} \times 0,7$ dmm. die wahrscheinliche Unsicherheit der gemessenen Höhendifferenz wegen Veränderlichkeit der Lattenlänge. Setzt man sie dem wahrscheinlichen Zielfehler (41) gleich, so folgt

$$z = 0,4644 \times \frac{\vartheta}{m} q^2 \quad (43)$$

Setzen wir $\vartheta = 1$; $m = 6$; $q = 100$; so wird für das Doppel-Nivellement mit dem bayerischen Apparat der Zielfehler von 0,8 Kilometer an durch den Fehler der Lattenlänge übertroffen, und diese Grösse sinkt rasch bei stärkeren Steigungen, wie sie auf Chaussees oder schiefen Ebenen der Eisenbahnen vorkommen. Die schiefe Ebene des Fichtelgebirges bei Neuenmarkt stellt eine Bahnstrecke von 1 Meile Länge mit der Neigung $1 : 40$ dar. Gesetzt, der Zielfehler sei auch dort in den obengedachten Grenzen ($\vartheta = 1$) gehalten worden, so überschreitet der wahrscheinliche Irrthum in der Lattenlänge denselben schon von $124^m = \frac{1}{8}$ Kilometer an; für $\vartheta = 2$ aber von $\frac{1}{4}$ Kilometer an.

Wir sehen daraus, dafs einmalige Bestimmung der Lattenlänge, auch die sorgfältigste, ein Nothbehelf bleibt und bedeutende Irrthümer in Bezug auf die Höhenunterschiede nicht zu hindern vermag, welche sich noch wesentlich verstärken, wenn zur Unsicherheit der Mafseinheit wegen wechselnder Lattenlänge jene wegen mangelhafter Scalentheilung kommt. Auch die Wirkung dieses Uebels ist dem nivellirten Höhenunterschied proportional und dann am grössten, wenn sich das Nivellement mit gleichen Zielweiten auf gleichartigen Neigungen bewegt, weil dann immer nahe dieselben fehlerhaften Lattenstellen benützt werden und keine Compensation eintritt.

Man kann den Fehler wegen mangelhafter Scala als aus zwei Theilen μ und ν bestehend betrachten: der eine, meist kleinere, spricht die

Unmöglichkeit aus, durch Prüfung einer endlichen Zahl von Mafsen der Scala jenen Mittelwerth der Scaleneinheit zu finden, welche den unendlich vielen Scalenstücken zu Grunde liegt, aus denen sich die Höhenunterschiede geometrischer Nivellements zusammensetzen können. Er haftet dem für die Scaleneinheit gewählten Mittelwerth ein für allemal an und hängt, aufser von der Ungleichheit der Eintheilung, noch von Zahl und Vertheilung der verglichenen Mafscombinationen auf der Scala ab, sodafs er durch Vermehrung der letzteren auf ein beliebig kleines Mafs gebracht werden kann, freilich je nach Güte der Scala mit sehr verschiedenem Aufwand von Mühe. — Der zweite Bestandtheil ν drückt die Abweichung des einzelnen, beliebig herausgegriffenen, Scalenmafes von jenem Mittelwerth der Scaleneinheit aus und hängt nur von der Güte der Theilung ab. Sind μ und ν wahrscheinliche Fehler, so setzen sie sich zum Scalenfehler ψ wie folgt zusammen:

$$\psi = \sqrt{\frac{\mu^2}{l} + \frac{\nu^2}{lmn}} \quad (44)$$

worin l die Anzahl der zum Nivelliren benützten Latten bedeutet, wenn jede derselben gleich sorgfältig mit dem Normalmafs verglichen ist, ferner m die Anzahl der zu jedem Blick benützten Ocularfäden und n die Anzahl der Wechsel in der Neigung des Terrains oder der Zielweite, weil auch hierdurch neue Lattenstücke mit neuen Fehlern zwischen die Visirlinien benachbarter Instrumentenstände treten. Aus den Höhenunterschieden der Visirlinien je zweier Nachbarstände, vermehrt um den Unterschied der Höhen des ersten Rückblickes und des letzten Vorblickes, bezogen auf die beiden Fixpunkte, setzt sich der Höhenunterschied der letzteren algebraisch zusammen; ψ aber ist im Allgemeinen nicht der algebraischen Summe proportional, sondern der Summe jener Abstände der Visirlinien, absolut genommen. Wir vereinigen deshalb ψ mit dem wahrscheinlichen Fehler ϱ wegen Veränderlichkeit der Lattenlänge, welcher die gleiche Eigenschaft besitzt, zu dem wahrscheinlichen Fehler Ψ , der sich mit Rücksicht auf (44) berechnet:

$$\Psi = \sqrt{\frac{\mu^2}{l} + \frac{\nu^2}{lmn} + \varrho^2} \quad (45)$$

Bei der bayerischen Lattenvergleichung im Februar 1870, blos mittelst messingener Meterstäbe, wurde μ aus je 20 über die ganze Scala vertheilten, doppelt ausgeführten mikroskopischen Mafsvergleichen pro Latte zu $\pm 0,13$ dmm auf das Meter bestimmt, ν ergab sich zu $\pm 0,99$ dmm auf das Meter. Ein Theil dieser Bestimmung, nämlich der für Latte I, wurde 1872 durch eine Messung auf dem Berner Comparator in soweit bestätigt, als sich dort aus 10 Vergleichen verschiedener Lattentheile $\pm 0,58$ dmm als wahrscheinlicher Theilfehler eines Striches, also $\pm 0,58\sqrt{2}$ oder 0,83 dmm. als wahrscheinliche Unsicherheit eines beliebigen Lattenmafes ergab, ganz wie

1870 in München (*Bayr. Präc. Niv. I, 38 u. II, 11*). Setzen wir in (45) die oben angegebenen Werthe von μ und ν , ferner für ϱ wie früher 0,7 ein und nehmen $l=2$; $m=3$; $n=1$, also nahezu constante Terrainneigung und Zielweite an, so berechnet sich

$$\psi_1 = \sqrt{0,0085 + 0,1633 + 0,49} = \pm 0,81 \text{ dmm}$$

Wird dagegen n sehr groß, so folgt

$$\psi_0 = \sqrt{0,0085 + 0,49} = \pm 0,71 \text{ dmm}$$

und in den meisten Fällen wird sich der wahrscheinliche Fehler zwischen diesen beiden Größen bewegen. Wenn sich also der nivellirte Höhenunterschied zweier Fixpunkte aus Lattenstücken von etwa 1^m Länge zusammensetzt, so kann der Theilfehler zuweilen einen sehr merklichen Einfluss ausüben, der bei kleinerem ϱ noch stärker hervortreten würde.

Wir haben hier aus guten Gründen den Theilfehler der Scala unter denjenigen aufgeführt, welche mit den Höhenunterschieden wachsen und müßten ihn folgerichtig von jenen abscheiden, welche wir, weil unabhängig vom Höhenunterschied, unter der Bedingung einer entsprechenden Fehlerbegrenzung als proportional der Wurzel aus der Länge nivellirter Strecken betrachten dürfen. Wir nahmen diese Scheidung nicht früher vor, weil oben der gewünschte Erfolg der Fehlerbegrenzung nachzuweisen war, aber auch der Fehler der Latten-theilung, wie dort erwähnt, in die Grenze mit eingeschlossen worden ist. Denn nicht nur Lattenstücke von 1^m Länge sind mit der wahrscheinlichen Unsicherheit $\pm 0,99$ dmm gegenüber dem Mittelwerth der Scaleneinheit behaftet, sondern jedes beliebige Lattenstück, also auch jene 3,5^m langen Stücke, aus deren Ablefung die Fehlerquadrate φ^2 der Seite 54 abgeleitet sind. Von diesen Quadratzahlen, welche sich auf

die einzelne Fadenablefung beziehen, müßte $\frac{\nu^2}{2} = \frac{0,98}{2}$ in Abzug kommen, nämlich die Unsicherheit der einzelnen Fadenablefung wegen der Theilfehler. Dadurch würde sich in (35) die Constante $A_{0/1}$ um

$\Delta A = \frac{[px]_{0/1}}{[pxx]_{0/1}} \times \frac{\nu^2}{2} = \frac{469669}{21993209} \times \frac{\nu^2}{2} = 0,010464$ vermindern, und wir würden statt Gleichung (41) die folgende erhalten:

$$\varphi = 0,4691 \sqrt{\frac{yz}{m}} \text{ Dezimillimeter} \quad (46)$$

Umgekehrt aber haben wir zu bedenken, daß ein Nivellement sich auch aus größeren und kleineren Stücken als 1^m zusammensetzen kann und daß dann der Fehler ν einer Reduction auf die Mafseinheit bedarf, um mit μ und ϱ zu jenem Fehler ψ vereinigt zu werden, welcher dem Höhenunterschied, ausgedrückt in der Mafseinheit, proportional ist. Die Reduction erfolgt durch Multiplication von ν mit dem Verhältniß der Mafseinheit zu dem betreffenden Lattenstück und wir haben *jenen* Werth der reducirten ν zu suchen, welcher alle beim Nivelliren vorkommenden ihrer Größe nach in zwei Gruppen von gleicher Anzahl

scheidet. Nun könnte man wohl aus den bayer. Messungsprotocollen der Jahre 1870/71 die entsprechende mittlere Niveaudifferenz je zweier Standvisirlinien ausfindig machen, hier genügt jedoch deren Schätzung, weil es uns nur darauf ankommt zu zeigen, welchen Betrag Ψ erreichen kann, um darnach auf die Nothwendigkeit einer Verminderung hinzuweisen. Nehmen wir also 1 : 300 als mittlere Steigung der Eisenbahnen und 60^m als mittlere Zielweite an, so ist $\frac{120}{300} = \frac{2}{5}$ Meter die mittlere Niveaudifferenz der Visur von Nachbarständen und wir haben $\frac{25\nu^2}{4}$ statt ν^2 in die Gleichung (45) einzuführen, sodass wir bekommen:

$$\Psi = \sqrt{\frac{0,0169}{l} + \frac{6,125}{lmn}} + 0,49 \quad (47)$$

für $l = 2$; $m = 3$ und $n = 1$ erhält man jetzt

$$\Psi_1 = \sqrt{1,5193} = \pm 1,233 \text{ dmm}$$

als obere Grenze, während $\Psi_0 = \pm 0,71$ dmm die untere bleibt. Man wende nicht ein, n sei der Anzahl der Stände proportional, weil jede neue Visur mindestens um einige Centimeter gegen die vorgehenden verschoben sei, also selten oder nie im neuen Stand der alte Lattenfehler wiederkehre. Abgesehen davon, dass auf Eisenbahnstrecken von constanter Steigung, gerade dann, wenn die Arbeit gut geregelt ist und mit gleichmässiger Zielweite erfolgt, die Visuren nur innerhalb geringer Spielräume wechseln; so ist auch der fragliche Theilfehler selten auf einen Centimeter beschränkt, sondern überträgt sich in nahezu gleicher Grösse auf einige Nachbartheile, bis er Vorzeichen und Grösse, oder wenigstens eines, plötzlich wechselt und nun für eine neue Gruppe nahe constant bleibt. An solchen Wechselfunkten sind nämlich grobe Theilfehler zwischen die übrigen eingestreut.

Diese sind es aber auch, welche den Werth jener Massvergleichen stark herabsetzen, die sich blos auf die ganze oder nahezu ganze Lattenlänge erstrecken, ein Mass, welches beim Nivelliren mit 3 Ocularfäden selbst auf starken Steigungen niemals in die Höhenmessung eingeht, während gerade die am häufigsten benützten Scalentellen, die in der Mitte, auf die Wahl des Mittelwerthes für die Scaleneinheit gar keinen Einfluss üben. Selbst der Abstand irgend eines Theilstriches vom Lattenfuss kann uns gleichgültig sein, wenn nicht, wie in Bayern, abwechselnd an Horizontalmarken und an solche in Verticalwänden angebunden wird und wenn man die Vorsicht gebraucht, auf erstere stets dieselbe Ziellatte aufzustellen. Darum sollte die ganze Lattenlänge nur ihrer Veränderlichkeit wegen öfters geprüft werden, ausserdem aber die einzelnen Scalentheile möglichst eingehend, und an der Feststellung des Mittelwerthes der Scaleneinheit sollten die inneren Scalentheile hervorragenden Antheil haben. Auch scheint die Grenze von 1 dmm für den Theilfehler, und zwar sowohl grösser als kleinerer Lattenstücke, durchaus keine zu hohe Anforderung an die Technik;

wenigstens sollten Theilfehler von 5 dmm und darüber nicht mehr geduldet werden.

§. 23. Am deutlichsten sprechen für Beachtung dieser scheinbar so geringfügigen Dinge*) die Anschlüsse von Nivellements, welche mit verschiedenem Apparat ausgeführt wurden, sobald die Höhenunterschiede der Anschließpunkte beträchtlich werden. So lassen die 4 Verbindungspunkte des französischen Nivellements mit jenem der Schweiz, wie das *Niv. de préc. II, p. 147* ausführt, auf einen Unterschied der beiderseitigen Reductionszahlen für Normalmafs schließen, sodafs die französischen Coten mit

$$1,000192 \pm 0,000048$$

multiplicirt werden müssen, um sie in dem Mafs des Berner Comparators auszudrücken. Eine directe Untersuchung der französischen Latten in Bern war noch nicht möglich und würde sich auch schwerlich gerade auf die Latten erstreckt haben, welche jene Anschlüsse vermittelten. Und wenn auch, so ist damit noch nicht die Abweichung eliminirt, welche die Veränderlichkeit des Holzes jener Latten hervorrief, die zwischen Genf und dem mittelländischen Meer zum Nivelliren dienten; sodafs bei der nicht geringen absoluten Höhe, in welcher der Ausgangspunkt des Schweizer Nivellements liegt (374^m), eine merkliche Unsicherheit aller darauf gestützten Meereshöhen zurückbleibt.

Noch auffallender ist die Differenz der Reductionszahlen, welche sich aus den Bayerisch-Würtembergischen Anschlüssen ableiten läfst, obwohl die Latten beider Länder, allerdings nicht durch dieselben Normalstäbe, mit dem Urmafs verglichen worden sind. Die *zweite Mittheilung des bayer. Pr. Niv.* enthält auf S. 12 eine Zusammenstellung von 5 Anschließpunkten zwischen Würzburg und dem Boden-

*) Auch die Neigung der Ziellatten gegen das Loth bewirkt einen Fehler, der, wie HIRSCH bemerkt, einer Verkürzung der Scaleneinheit gleichkommt und stets in demselben Sinne, wenn auch in verschiedenen Beträgen wirkt. Man hat dagegen das Lattenschwenken empfohlen, wobei das kleinste, am Faden erscheinende Mafs abgelesen wird, aber immer noch keine Garantie dafür gegeben ist, dafs die Latte während ihrer Schwingungen wirklich die Lothlage passirte, da die fortwährende Unruhe kaum zu controliren erlaubt, ob die Schwingungsebene lothrecht ist. Kann sich der Lattenträger aber nach einer geprüften Dosenlibelle oder zwei kreuzweise befestigten, wenig empfindlichen Röhrenlibellen richten, welche nur den Bewegungen der Latte, nicht, wie die Senkel, den Windstößen folgen, so wird es ihm nach einiger Uebung gelingen, die Ziellatte fast vollkommen lothrecht zu erhalten. Versuche bei ziemlich heftigem Wind, welcher das Nivelliren verhinderte, ergaben ein Schwanken der Latte innerhalb 50' als äufserste, d. h. nie erreichte Grenze, oder 25' Abweichung vom Loth. Dem entspricht eine Verkürzung der Scaleneinheit im Verhältnifs von

$$\left(1 - \cos \frac{1}{137.51}\right) : 1 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{137.51}\right)^2 = 0,0000264$$

als Fehlergrenze, der etwa der wahrscheinliche Fehler von $\frac{1}{4}$ bis $\frac{1}{5}$ dieses Betrages entsprechen wird: neben ψ eine verschwindende Gröfse. Die fraglichen Versuche waren übrigens, wenn auch durch den heftigen Wind beeinträchtigt, so doch durch die grofse Uebung und Gewissenhaftigkeit des Lattenträgers unterstützt.

fee, für welche Württemberg durchweg kleinere Höhenunterschiede gefunden hat als Bayern. Hier folgen die von Bayern nivellirten Höhenunterschiede H , alle bezogen auf den ersten der bei Würzburg angeführten Punkte (Nr. 942); ferner die Differenzen $H - Y$, worin Y die von Württemberg gefundenen Höhenunterschiede bezeichnet; endlich die dem bayer. Nivellement entnommenen Quadrate der wahrscheinlichen Zielfehler.

		H	$H - Y$	φ^2 in □dmm
Bayer. Steinviereck	942 bei Würzburg	0	0	0
Bayer. Höhenmarke	943 ebenda	+ 8,5205	+ 0,0090	6
Würt. Glasmarke	134 zu Nördlingen	+ 244,4452	+ 0,2532	10024
Bayer. Höhenmarke	653 zu Neuulm	+ 285,6493	+ 0,4268	14222
Würt. Glasmarke	233 zu Nonnenhorn am Bodensee	+ 234,6858	+ 0,3578	17417

Das gleiche Vorzeichen aller Differenzen $H - Y$ und ihr Wachsthum mit Zunahme von H läßt auf eine nothwendige Verkleinerung der bayer. Coten schließen, um sie auf das Maß zu überführen, in welchem das Würtemberger Nivellement erfolgte. Sei x diese Verkleinerung pro Meter und heißen y die reducirten Höhenunterschiede H , so wird allgemein

$$y = H - Hx$$

und wenn wir für y die von Württemberg gefundenen Höhenunterschiede Y einführen, so entstehen die 4 Fehlergleichungen, worin außerdem $x = 0,001^m + \xi$ gesetzt und beiderseits mit 1000 multiplicirt wurde, um ξ in Millimetern auszudrücken; also

$$\left. \begin{aligned} 0 &= - 0,5 + 8,5\xi \\ 0 &= - 8,6 + 244,4\xi \\ 0 &= - 141,4 + 285,6\xi \\ 0 &= - 123,3 + 234,7\xi \end{aligned} \right\} (48)$$

Das Gewicht dieser Gleichungen läßt sich nur schätzungsweise finden, denn die oben mitgetheilten Fehlerquadrate der H beziehen sich nur auf das bayer. Nivellement und auch hier nur auf den beim Nivelliren ermittelten Zielfehler, lassen dagegen die Veränderlichkeit der Lattenlänge unberücksichtigt. Für Y mangeln auch die Zielfehler, doch werden wir nicht allzuweit irren, wenn wir die aus den Zielfehlern erwachsende Unsicherheit, welche nahe mit der Wurzel aus der Entfernung zunimmt, für beide Nivellements gleichsetzen und demgemäß φ^2 verdoppeln. Den wahrsch. Fehler wegen Veränderlichkeit der Latten nehmen wir in beiden Ländern zu 0,7 dmm pro Meter an und setzen ihn den H proportional, da die Anhaltspunkte für Berücksichtigung der verlorenen Steigungen noch nicht alle der Oeffentlichkeit vorliegen. Daraus resultirt für Cotendifferenzen — und aus

folchen sind die Gleichungen (48) gebildet — der wahrsch. Fehler von etwa $0,1^{\text{mm}}$ pro Meter. Die wahrsch. Fehler Φ obiger Gleichungen setzen sich also wie folgt zusammen:

$$\begin{aligned} \sqrt{12 + 72} &= \pm 9 = \Phi, \\ \sqrt{20048 + 59731} &= \pm 282 = \Phi_{\text{II}}, \\ \sqrt{28444 + 81567} &= \pm 332 = \Phi_{\text{III}}, \\ \sqrt{34834 + 55084} &= \pm 300 = \Phi_{\text{IV}} \end{aligned}$$

Um den Gleichungen (48) gleiches Gewicht zu geben, dividiren wir sie der Reihe nach mit folgenden abgerundeten Zahlen Φ , nämlich 1; 28; 33; 30 und erhalten:

$$\left. \begin{aligned} 0 &= -0,500 + 8,50\xi \\ 0 &= -0,307 + 8,73\xi \\ 0 &= -4,285 + 8,65\xi \\ 0 &= -4,110 + 7,82\xi \end{aligned} \right\} (49)$$

und diese Gleichungen sind nach der Meth. d. kl. Qu. zu behandeln. Wie man sieht, weichen sie nicht sehr von jenen ab, welche man unter Annahme der Proportionalität des Fehlers mit dem Höhenunterschied erhalten hätte. Man findet

$$x = 1,268^{\text{mm}} \pm 0,090^{\text{mm}}$$

Die wahrscheinlichsten Anschlusscoten, ausgedrückt im Lattenmafs der Würtemberger und von Punkt 942 aus aufwärts gezählt, werden demnach heifsen:

$$y = H - 0,001268 H = 0,998732 H \quad (50)$$

Diese bedeutende Differenz der gewählten Scaleneinheit in beiden Ländern wird durch die Berner Mafsvergleichung im Februar 1872 wenigstens theilweise bestätigt, wie aus einem Briefe HIRSCH's hervorgeht, den *das bayer. Pr. Niv. II*, 10 mittheilt. Nach dem Berner Comparator betrug 1872 ein Scalenmeter der bayer. Latte I: $0,999971^{\text{m}} \pm 0,014^{\text{mm}}$; nach der Münchener Vergleichung von 1870 dagegen $1,000371^{\text{m}} \pm 0,004^{\text{mm}}$. Demnach zeigt sich das in Bayern angenommene Scalenmafs für Latte I genau um $0,4^{\text{mm}}$ zu grofs, freilich erst $\frac{1}{3}$ der Gröfse x und es ist noch die Frage, ob der Rest von $\frac{2}{3}$ auf die Würtemberger Latten entfällt, was sich kaum ohne Weiteres annehmen läfst.

Woher aber die Verkürzung der Scalenlänge? Denn als solche mufs man die in Bern nachgewiesene Differenz betrachten, solange man die Comparatorstäbe für übereinstimmend hält. Die ältere Untersuchung in München geschah mittelst zweier BREITHAUPT'schen Messingmeter *à traits*, welche, wie die Bestimmung ihres Ausdehnungscoefficienten bewies, unter sich gut übereinstimmen. Die spätere in Bern erfolgte, wie schon erwähnt, mit einem eigens dazu angefertigten,

2,9^m überspannenden Eisenstabe. Die Endschiedenheit, womit alle Anschlußpunkte des bayerisch-würtemberg'schen Nivellements, obwohl daselbe sich auf 3 Jahre vertheilte, zu ihrer Erklärung eine Verkürzung der bayerischen Latten unter das in Rechnung gebrachte Mafs verlangen, erschwert zugleich die Annahme, dafs die dazwischen erfolgte Mafsvergleichung die Latten in einem andern Zustande untersucht habe, als in welchem sie zum Nivelliren dienten. Dennoch ist die Möglichkeit nicht ausgeschlossen, dafs die Untersuchung mittelst kurzer Meterstäbe eine Quelle der Scalenverkürzung unbeachtet liefs, die sich bei späterer Untersuchung der ganzen Lattenlänge nothwendig fühlbar machte, nämlich die Biegung der Latten. Einzelne derselben zeigten in der That eine schwache Einbiegung der Scala, deren Pfeil im Winter 69/70 nirgends mehr als 2^{mm} betrug. Bei der Untersuchung ward durch untergelegte Böcke dafür gesorgt, dafs dieser Betrag sich nicht vermehrte. Prüft man, welcher Scalenverkürzung diese Lattenbiegung, selbst dreifach genommen, entspricht, einmal mittelst einer Sehne von 1^m, dann durch eine solche von 3^m Länge, so fällt sie natürlich bei der Probe der ersten Art geringer aus als bei der zweiten.

Biegungen eines prismatischen Stabes beeinflussen die Gesammtlänge seiner Seitenwände in doppelter Hinsicht, da einmal die Sehne der neutralen Faser sich verkürzt, daneben aber die Fasern der convexen Seite sich ausdehnen, die der concaven sich nothwendig zusammenziehen müssen, solange die Endflächen mit der Stabachse unveränderliche Winkel einschliessen. Die in zweiter Linie genannte Veränderung der Faserlänge ist beim Beginn der Biegung von beiden die stärkere. Solange der Bogen der neutralen Faser einem Kreise ähnelt, sind wir berechtigt anzunehmen, dafs die Ausdehnung oder Compression der äufseren Fasern auf der ganzen Länge gleichmäfsig stattgefunden habe und solange Tangente und Sinus des Krümmungswinkels vertauscht werden dürfen, läfst sich, unter der Annahme, dafs die neutrale Faser durch die Mitte des Stabes von der Dicke d gehe, die Veränderung v der äufseren Fasern berechnen aus

$$v = \pm \frac{4p}{L} d \quad (51)$$

worin L die Länge des Stabs, p den Pfeil der Krümmung vorstellt. Dieser Betrag, welcher im einfachen Verhältnifs mit p wächst, erreicht für $d = 2^{\text{cm}}$; $L = 300^{\text{cm}}$; $p = 0,6^{\text{cm}}$ erst die Gröfse $v = \pm 0,16^{\text{mm}}$; also $0,053^{\text{mm}}$ pro Meter. In der vorliegenden Frage brauchen wir uns jedoch nur um die Verkürzung der Sehne der neutralen Faser zu kümmern, da nur diese durch Comparatorstäbe von verschiedener Länge verschieden beobachtet wird. Sie erfolgt im Verhältnifs vom Sinus des halben Krümmungswinkels zu dessen Bogen. Sei dieser $= \varphi$, im analytischen Mafs, und bedenkt man, dafs der Radius R des Bogens $= \frac{L}{\varphi}$ wird, so berechnet sich die Differenz w der ganzen Sehne und des Bogens aus:

$$w = \frac{2L}{\varphi} \left(\frac{\varphi}{2} - \sin \frac{\varphi}{2} \right) = L \left(\frac{\varphi^2}{4} \cdot \frac{1}{3!} - \frac{\varphi^4}{16} \cdot \frac{1}{5!} + \dots \right)$$

und wenn man $\frac{\varphi}{2}$ wie in (51) näherungsweise durch $\frac{4p}{L}$ wiedergibt,

$$w = \left[\frac{1}{3!} \left(\frac{4p}{L} \right)^2 - \frac{1}{5!} \left(\frac{4p}{L} \right)^4 + \dots \right] L \quad (52)$$

worin wir das zweite Glied der Klammer vernachlässigen dürfen. Aus der Gleichung

$$\frac{w}{L} = \frac{1}{3!} \frac{\varphi^2}{4} = \frac{1}{3!} \left(\frac{4p}{L} \right)^2$$

erfieht man, daß die Differenz von Sehne und Bogen, bezogen auf die Mafseinheit, mit dem Quadrate des Krümmungswinkels wächst, also auch sehr nahe mit dem Quadrate der Länge der benützten Normalmafsstäbe. Für $L = 300^{\text{cm}}$; $p = 0,6^{\text{cm}}$ wird

$$\frac{w}{L} = 0,00001067^{\text{m}} \text{ pro Meter}$$

für $L = 100^{\text{cm}}$ nur davon der neunte Theil. Beide Beträge find so unmerklich, daß auch ihr Unterschied durchaus keinen Einfluss üben kann. Bei geringen Biegungen ist es also gleichgültig, ob mit langen oder kurzen Normalstäben geprüft wird.

Aus (51) und (52) folgt:

$$v + w = \frac{4p}{L} \left(\frac{2p}{3} \pm d \right) \quad (53)$$

Wollte man nun, trotz der gänzlichen Unwahrscheinlichkeit der Sache, zugeben, daß die Latten sich vor und nach der Münchener Mafsvergleichung durchgebogen haben, so müßte, um pro Meter $0,4^{\text{mm}}$ und auf die ganze Lattenlänge $1,2^{\text{mm}}$ Verkürzung zu erzeugen, wenn wieder $d = 2^{\text{cm}}$ und $L = 300^{\text{cm}}$ gesetzt wird,

$$p = -\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{63}}{2} = \begin{cases} -5,469^{\text{cm}} \\ +2,469^{\text{cm}} \end{cases}$$

werden. So stark aber waren die bayerischen Latten niemals durchgebogen. Das Minuszeichen bezieht sich auf convexe Scalenbiegung.

Es bleibt noch die Annahme, daß der Normalstab, nach welchem BREITHAUPT seine Meterstäbe adjustirt, um den enormen Betrag von $0,4^{\text{mm}}$ pro Meter kürzer sei als der Berner Prüfungsstab, und wenn man diese als unzulässig verwirft, noch zweierlei: einmal daß das Tannenholz der bayer. Latten viel größeren Längenänderungen unterworfen sei, als das der schweizerischen und dann, daß die beiden äufseren Decimeter der bayer. Latte I, oder auch nur einer derselben, kleinere Centimeter enthält, daß also die Theilungsfehler der äufseren Lattentheile Schuld tragen am verschiedenen Resultat der beiden Mafsvergleichen. Fügt man für die Latten Württembergs, welche

jedoch aus derselben Werkstätte bezogen wurden wie die der Schweiz, ähnliche Annahmen hinzu, so verschwinden endlich die Widersprüche im bayerisch-württembergischen Nivellement.

§. 24. Aber selbst zugegeben, daß sie in diesem speciellen Falle sich auch durch nachträgliche wiederholte Prüfungen*) der fraglichen Latten- und Maßstablängen beseitigen lassen — spricht nicht schon das Auftreten solcher Widersprüche in sorgfältigen, mühevollen Messungen deutlich dafür, daß es Zeit wäre, das bisher verwendete Lattenmaterial mit seinen unregelmäßigen Veränderungen zu verlassen und zu metallenen Zielscalen zu greifen? Auch verdient das französische Verfahren der Lattentheilung wohl in so ferne Nachahmung, als es höchst vortheilhaft wäre, sämtliche zu Précisionsnivellements verwendeten Scalen aus Einer Werkstätte, unter strenger Controle musterhafter Ausführung, hervorgehen zu lassen. Das Bedenken gegen Metallscalen, daß die Beobachtung ihrer Temperatur zu schwierig sei und am Ende dem Lattenträger überlassen werden müßte, läßt sich durch Verwendung metallener Spiralthermometer heben, deren Zeigerstand mit dem Fernrohr abgelesen werden könnte.

Latten mit Stahlscalen, auf beiden Seiten getheilt, waren 1870 für das bayer. Nivellement bestellt, blieben aber unvollendet, da die zuerst gelieferten etwas welligen Stahlblechstreifen, wegen der Truppen Transporte auf den Eisenbahnen nicht mehr durch neue ersetzt werden konnten. Das Gewicht der Latten war auf 6—7 Kilogramm bestimmt, die Bezifferung sollte auf 2 rechtwinklig zusammengeleimten Holzleisten Platz finden, an deren scharfer Stoßkante die Scala in Angeln drehbar zu befestigen war. Stahlfuß, Griffe, Libellen, Thermometer sollten in's Holz eingelassen werden; durch gleichzeitige Ablesung beider Scalen einer und derselben Latte von beiden Instrumenten aus sollte Zeitgewinn, und durch die verschiedene Nullpunktlage beider Theilungen Ersatz für die Doppelplatten des bayer. Nivellements erzielt werden. — Ich zweifle jedoch nicht, daß statt der stählernen auch lackirte Weißblehscalen, in doppel-T-förmige Rahmen von demselben Material eingesetzt, den gewünschten Zweck vollkommen erfüllen und uns eher berechtigen würden, den Thermometer bloß mit der Fassung in Verbindung zu setzen. In Rücksicht auf letzteren Punkt ist es kaum zu beklagen, daß die Ziellatten aus Stahl und Holz nicht zur Anwendung gelangten, weil etwaige Mißerfolge, statt der mangelhaften Verbindung mit dem Thermometer, vielleicht der Anwendung des Metalls überhaupt zugeschrieben worden wären. Auch kann es sich hier nicht um vereinzelte Verbesserungen handeln, die, wenn sie ohne Nachahmung bleiben, wohl den Werth von gelungenen Versuchen beanspruchen mögen, auf das internationale

*) Betrachtet man die Berner Maßvergleichung vom Februar 1872 als endgültig, so müssen sämtliche Höhenunterschiede des bayerischen Nivellements um $0,0004^m$ pro Meter verkleinert werden, also einzelne um $0,24^m$!

Unternehmen der Präcisionsnivellements aber kaum Einfluß üben. Beispiele höchst dankenswerther Einzelversuche sind nun genug geliefert um übersehen zu können, welche Construction der Instrumente und welche Formen der Aufnahme allgemein empfehlenswerth erscheinen, welche andere noch der Verbesserung bedürfen. Von einem so seltenen internationalen Unternehmen wie die europäische Gradmessung darf die Wissenschaft aber erwarten, daß es sich nicht begnüge, zusammenhanglose Versuche zu Tage zu fördern, sondern daß alle unternommenen Arbeiten nach einheitlichem Plane ausgeführt und allenthalben das Beste geleistet werde, was unsre Kenntnisse und Hilfsmittel vermögen.

Wir haben gesehen, daß die Fehler des Instruments und unfres Schätzungsvermögens, welche nur mit der Wurzel aus der Entfernung sich anhäufen, mittelst verhältnißmäßig geringen Aufwandes von Mühe noch beliebig stark vermindert werden können, daß aber die darauf verwandte Sorgfalt größtentheils illusorisch wird durch die Unsicherheit des Werthes unsrer Zielscaleneinheit; eine Unsicherheit, deren Einfluß der Summe aller durchgemessenen Höhenunterschiede proportional wächst. Niemand würde es wagen, heutzutage in Europa eine Basis zum Behufe der Gradmessung mit hölzernen Stäben zu messen. Während wir bei Horizontalaufnahmen zu wissenschaftlichen Zwecken eine Genauigkeit der Längen von 1 : 500000 anstreben, begnügten wir uns bisher bei Höhenmessungen mit der Genauigkeit 1 : 10000 und weniger, für technische Erhebungen freilich ausreichend, für Beantwortung wissenschaftlicher Fragen aber beschämend unsicher. Man könnte entgegenen, daß sich größere Mühe bei Höhenmessungen nicht lohne, da uns diese keine so wichtigen Aufschlüsse über die Erdgestalt zu geben vermöchten, als die mit Triangulationen verbundenen astronomischen Beobachtungen. Aber die Fragen, welche sich an Höhenmessungen knüpfen, sind wichtig genug und werden sich noch vermehren, sobald die Beobachtungskunst eine schärfere Antwort verspricht, wie im Folgenden an einem Beispiel hervortreten wird.

Cap. III.

§. 25. EDUARD SCHMIDT'S *Lehrbuch der mathematischen Geographie* (Göttingen 1829, I, 168) erwähnt eines im 16. Jahrhundert aufgetauchten Vorschlages, die Größe der Erdkugel mit Hülfe von Verticalmessungen zu finden. Aus der Höhe einer Bergspitze und der Entfernung, in welcher diese am Horizont verschwindet, sollte die Krümmung des verbindenden größten Kreises der Erde bestimmt werden. Es ist dies nicht der einzige wissenschaftliche Vorschlag,

welcher einige Jahrhunderte zu früh gemacht wurde, und er mußte resultatlos bleiben, so lange weder die Messung von Berghöhen noch die Kenntniß der terrestrischen Refraction hinreichende Fundamente zu seiner Ausführbarkeit boten. In anderer Form ist diese Idee jedoch neuerdings wieder aufgetreten, und obwohl noch nicht alle Hindernisse ihres Erfolges weggeräumt sind, muß man zugeben, daß sie heutzutage mehr Beachtung verdient. Ihr Werth liegt in der Anwendbarkeit — sobald sie überhaupt anwendbar sein wird — auf alle Richtungen der Windrose, während die bisherigen scharfen Methoden die Erdkrümmung zu messen, die Breiten- und Längengradmessungen, auf zwei Hauptrichtungen beschränkt waren. Freilich wird diesen astronomisch-geodätischen Operationen gegenüber die rein geodätische Messung nach Art jenes alten Vorschlages immer nur den Rang einer Detailarbeit einnehmen, da sie selbstverständlich auf Entfernungen beschränkt ist, innerhalb welcher zwei irdische Stationen sich gegenseitig sichtbar bleiben, also etwa 15 Meilen oder ein Aequatorgrad; da ferner, unter Annahme gleich guter Horizontalmessungen für beiderlei Weisen der Aufnahme, die Messung irdischer Höhenwinkel an Genauigkeit hinter den astronomischen Polhöhemessungen zurückbleibt, ebenso wie hinter den telegraphischen Längenbestimmungen der Neuzeit.

Aus den astronomischen Operationen wird der Einfluß der Refraction fast ganz eliminirt, Dank deren geringen Schwankungen in größeren Höhen und den erfolgreichen Bemühungen vieler Gelehrten, das Gesetz derselben zu erkennen und als eine Function von Druck und Temperatur der Luft darzustellen, welche beide unserer Beobachtung zugänglich sind. Zudem läßt die Bestimmung der Polhöhe derartige Beobachtungs-Combinationen zu, daß abnorme Refractionswerthe sich nahezu wieder aufheben. Dagegen in die Messung irdischer Höhenwinkel geht der volle Betrag der terrestrischen Refraction ein, die, wenn auch nicht dieselbe GröÙe erreicht, so doch ähnlichen Schwankungen unterworfen ist, wie die astronomische Horizontalrefraction. Den aus Beobachtungen von Temperatur und Druck der Luft gefolgerten Functionswerthen haften demnach namhaftere Unterschiede von dem wirklichen Betrage der terrestrischen Refraction an. Auch ist bis jetzt noch kein geeignetes Verfahren zu ihrer Elimination gefunden worden, das sich nicht auf vorgängige Kenntniß der Erdkrümmung stützte, eine Grundlage, auf die Derjenige verzichten muß, welcher die Erdkrümmung aus Höhenwinkelmessungen erst ableiten will. — Es ist nun freilich weit leichter festzustellen, *was* zur Erfüllung dieser Aufgabe erforderlich ist, als *wie* sie erfüllt werden kann, und es soll hier nur der minder schwierige Theil behandelt und namentlich untersucht werden, ob die Präcisionsnivelements einstweilen den Anforderungen genügen, welche das Problem an die Messung der Höhen stellt. Dabei ist es gleichgültig, ob dasselbe schon jetzt oder später, nach gründlicherer Prüfung der bestehenden Refractionsformeln durch strenge Versuche, oder nach dem Auffinden eines Weges, die Refraction zu eliminiren, lösbar ist. Genug, wir betrachten es als lösbar und nehmen

auch eine solche Anordnung der Beobachtungen an, die der gemachten Voraussetzung entspricht, dieselbe nämlich, welche zu Versuchen über die terrestrische Refraction dient und als Modification des vor 300 Jahren vorgeschlagenen Verfahrens betrachtet werden kann.

Dazu sind bekanntlich gleichzeitige und gegenseitige Beobachtungen terrestrischer Höhenwinkel, also von beiden Endpunkten des schiefen Schenkels aus, besonders geeignet; für den Krümmungsradius der Erde $\varrho = \infty$ und die Refractionswirkung Null würden solche Beobachtungen gleiche und entgegengesetzte Resultate geben müssen. Umgekehrt läßt deren Ungleichheit, abgesehen von Messungsfehlern, die Summe des Einflusses der Erdkrümmung und Refraction wahrnehmen. Wir addiren, um den Vorzeichenwechsel zu vermeiden, 90° zu den Höhenwinkeln und gehen so auf Zenithdistanzen über. Angenommen, die Lothe der Stationen A , und $A_{,,}$ lägen in einer Ebene, was in der Mehrzahl der Fälle nur nahezu eintritt, und schnitten sich unter dem Winkel 2α , während dieselben Lothe mit der gemeinsamen Sehne im Schnitt des Meerespiegels die Zenithwinkel $90 + \alpha$, und $90 + \alpha_{,,}$ bildeten, sodafs $\alpha + \alpha_{,,} = 2\alpha$; seien ferner z , und $z_{,,}$ die Zenithwinkel, unter welchen sich die Stationspunkte A , u. $A_{,,}$ (die Kreuzpunkte der lothrechten und wagrechten Drehachse der Alhidade) gegenseitig erscheinen müßten, wenn der Krümmungsradius des Meerespiegels $\varrho = \infty$ und die Refraction Null wäre, sodafs $z + z_{,,} = 180^\circ$; so werden die wahren Zenithwinkel, unter welchen A , und $A_{,,}$ gegenseitig beim bloßen Wegfall der Strahlenbrechung sichtbar werden müßten, $z + \alpha$, und $z_{,,} + \alpha_{,,}$ sein, sodafs die Summe der wahren Zenithwinkel $180 + 2\alpha$ beträgt. Heissen endlich Z , und $Z_{,,}$ die auf A , und $A_{,,}$ beobachteten scheinbaren Zenithwinkel, so sind diese durch den Einfluß der Refraction unter die Werthe $z + \alpha$, und $z_{,,} + \alpha_{,,}$ verkleinert und zwar um die kleinen Winkel β , und $\beta_{,,}$, welche die Lichtcurve zwischen A , und $A_{,,}$ mit der Sehne $A, A_{,,}$ einschließt und um welche diese Punkte über ihre wahre Lage erhöht erscheinen; wir setzen die Summe $\beta + \beta_{,,} = 2\beta$. Durch Addition der Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} Z &= z + \alpha - \beta \\ Z_{,,} &= z_{,,} + \alpha_{,,} - \beta_{,,} \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

erhalten wir die folgende:

$$Z + Z_{,,} = 180 + 2\alpha - 2\beta \quad (55)$$

und bilden wir den Refractionscoefficienten nach:

$$C_0 = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{Z + Z_{,,} - 180 - 2\alpha}{2\alpha} \quad (56)$$

(während ihn Manche nach $\frac{\beta}{2\alpha}$ bilden) so muß entweder α bekannt sein, um aus Beobachtung der scheinbaren Zenithwinkel Z , und $Z_{,,}$ die mittlere Krümmung der Lichtcurve zu finden; oder der Refractionscoefficient C_0 gegeben sein, um daraus die mittlere Erdkrümmung zwischen A , und $A_{,,}$ zu berechnen. In beiden Fällen ist sowohl die Lichtcurve als auch der Schnitt des Meerespiegels kreisförmig voraus-

gesetzt und von dieser willkürlichen Annahme befreien wir uns erst, wenn wir aus dem Niveauunterschied*) der Punkte A , und $A_{,,}$ und ihrem Horizontalabstand die Gröfsen z , und $z_{,,}$ numerisch berechnen und in die Gleichungen (54) einführen. Damit freilich verlieren beide Lösungen ihre Einfachheit und es muß, um die Gestalt der Lichtcurve zu bestimmen, schon die des Erdbogens zwischen A , und $A_{,,}$ im Einzelnen bekannt sein und umgekehrt genügt nicht mehr die Kenntniss eines Mittelwerthes des Refractionscoefficienten wie oben, sondern um β , und $\beta_{,,}$ zu berechnen und darnach auf die Werthe von α , und $\alpha_{,,}$ zu schliessen, müssen wir die Krümmung des Lichtstrahles auf der ganzen Linie $A, A_{,,}$ verfolgen können. Wir werden daher auch den Refractionscoefficienten C allgemeiner definiren als das Verhältniss des Winkels, welchen die Normalen eines kleinen Stückchens der Lichtcurve einschliessen, zu dem Winkel, den die Normalen eines ebenfogroßen Bogens des mittleren Erdsphäroids mit einander bilden; oder, da sich die Centriwinkel gleicher und sehr kleiner Bögen umgekehrt wie deren Radien verhalten, auch als das Verhältniss der Krümmungsradien ϱ und R des Sphäroids und der Lichtcurve, in Zeichen:

$$C = \frac{\varrho}{R} \quad (57)$$

§. 26. Sobald wir die Vorstellung kreisförmiger Gestalt der Erd- und Lichtcurve verlassen, müssen wir also nach allgemeinen Merkmalen ihrer Form suchen und da wir hier absehen von jenen, welche aus der einen oder anderen physikalischen Hypothese folgen würden, so liegt nichts näher als beide Curven in eine Form zu bringen, die allen krummen Linien gemeinsam ist und welche namentlich für flache Curven einfache Ausdrücke gibt, nämlich die Form einer TAILOR'schen Reihe mit unbestimmten Coefficienten.

Wir verwenden dabei ein Coordinatensystem, von dem schon im *I. Cap. pag. 15* und ff. theilweise Gebrauch gemacht wurde, und betrachten die Zahl h , welche die Länge eines Curvenstückes ausdrückt, gemessen vom Anfangspunkt A , aus in mittleren Erdbogensecunden, als Abscisse und den Winkel der beiden Berührenden im Anfangspunkte (0) und im Punkte (h) als Ordinate. So gelte für die Erdkrümmung zwischen A , und $A_{,,}$ die Gleichung:

$$F(h) = Mh + Nh^2 + Oh^3 + \dots \quad (58)$$

für die Lichtcurve aber:

$$f(h) = mh + nh^2 + oh^3 + \dots \quad (59)$$

aus denen wir durch Subtraction die dritte erhalten:

$$F(h) - f(h) = g(h) = \mu h + \nu h^2 + o h^3 + \dots \quad (60)$$

Für die Vortheile, welche das System bietet, läßt sich als Beispiel anführen, dafs die erste Abgeleitete der Gleichung (59) den Refrac-

*) Es ist darunter der Unterschied ihres wirklichen Abstandes vom Meerespiegel zu verstehen. S. p. 8 Anm.

tionscoefficienten C nach der Definition darstellt, welche ihm vermöge (57) gegeben wurde, also:

$$C = f(h) = m + 2nh + 3oh^2 + \dots \quad (61)$$

Von den 3 Gleichungen (58/60) ist nun blos die letzte (60) direct aus der Messung von Höhenwinkeln oder Zenithdistanzen zu bestimmen und auch von dieser nur so viele Glieder numerisch zu berechnen, als unabhängige Winkelbestimmungen vorliegen. Solange aber die Curven flach sind, und das werden sie ja innerhalb der hier betrachteten Distanzen immer bleiben, solange sie außerdem keine Wendepunkte haben — und bei der Erdcurve wenigstens sind wir davor sicher — solange werden wenige Glieder, oft schon zwei, zu ihrer Darstellung ausreichen. Aus (55) würde sich aber beispielsweise erst Ein Glied bestimmen lassen, nämlich, da hier z , und z'' , als nicht numerisch bestimmt vorausgesetzt werden:

$$\varphi(h) = \mu h = Z, + Z'' - 180$$

woraus, wenn die Differenz der rechten Seite in Secunden gegeben ist, folgt:

$$\mu = \frac{Z, + Z'' - 180}{h}$$

und wonach, wenn auch der Refractionscoefficient $f(h) = m$ aus (61) bekannt ist, leicht die Summe $m + \mu = M$ gefolgert werden kann. Damit ist die Erdkrümmung, freilich nur in Einem Gliede, d. h. unter Voraussetzung ihrer Kreisgestalt, bestimmt.

Um nun die Vortheile, welche uns die numerische Bestimmung von z , und z'' , also die Trennung der Resultate beider gleichzeitigen Zenithwinkelmessungen bietet, auch ausnützen zu können, müssen wir die Winkel berechnen, welche eine Sehne mit der Curve (60) oder den Tangenten ihrer Endpunkte bildet. Denn die aus (54) gezogenen Differenzen

$$\left. \begin{aligned} D, &= \alpha, - \beta, = Z, - z, \\ D'' &= \alpha'' - \beta'' = Z'' - z'' \end{aligned} \right\} \quad (62)$$

und

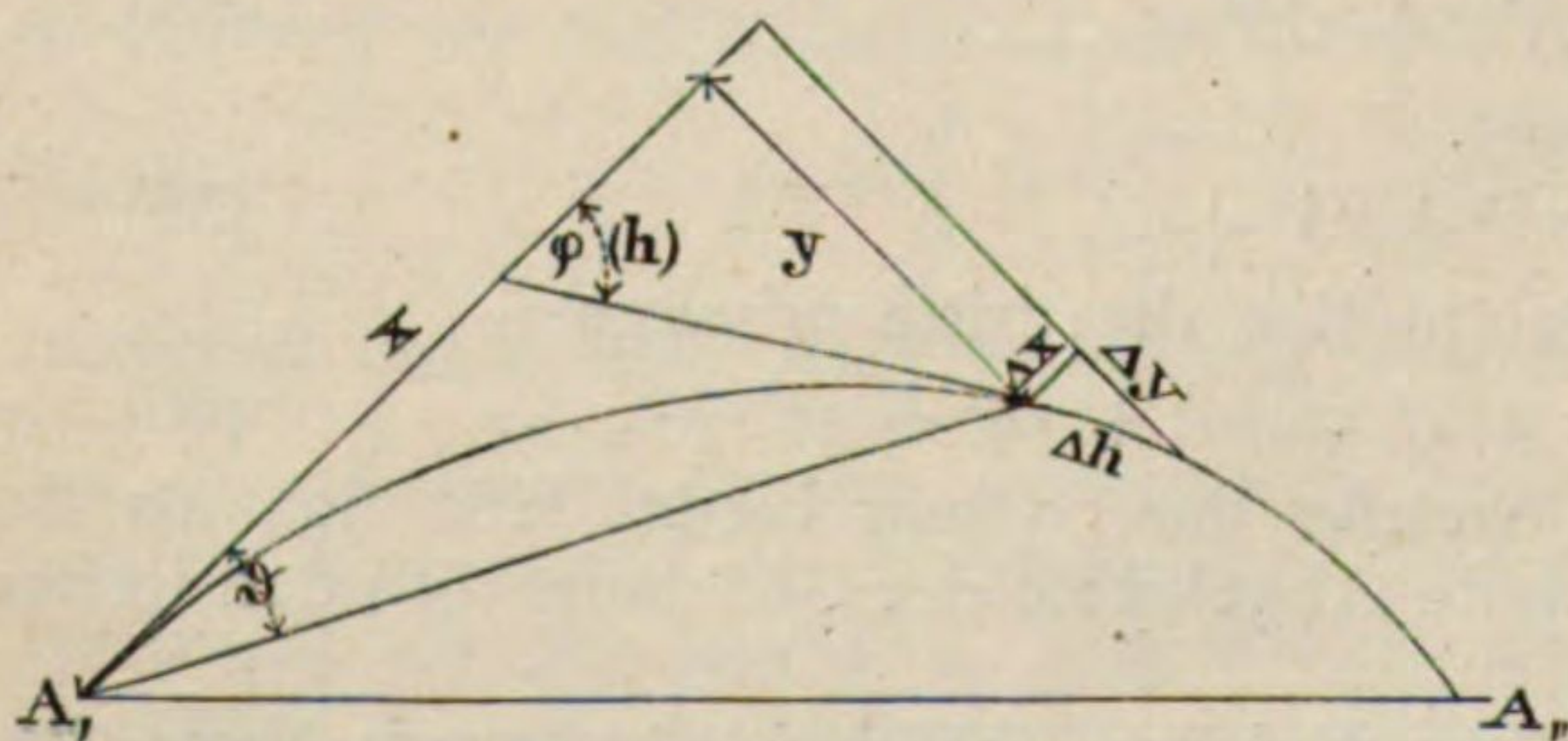
sind solche Winkel. Heißt α der Bogen zwischen A , und A'' , so wird

$$D, + D'' = \varphi(\alpha) = \mu \alpha + \nu \alpha^2 + \dots$$

und diese Bedingung haben die Ausdrücke für D , und D'' , zu erfüllen. Betrachten wir

allgemein den Winkel φ (Fig. 4), welchen die Berührende des Anfangspunktes A , mit der Sehne des Bogens h einschließt und fällen zu dem Ende das Loth y vom Punkte (h) aus auf die Berührende, von welcher es das Stück x abschneidet, so wird:

Fig. 4.



$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{y}{x} \quad (63)$$

Aus der Figur folgt ferner, wenn wir zu analytischem Winkelmafs übergehen

$$\left. \begin{aligned} \sin \left(\frac{\varphi(h)}{206265} \right) dh &= dy \\ \text{und} \quad \cos \left(\frac{\varphi(h)}{206265} \right) dh &= dx \end{aligned} \right\} \quad (64)$$

und nach (63)

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{\int_0^h \sin \left(\frac{\varphi(h)}{206265} \right) dh}{\int_0^h \cos \left(\frac{\varphi(h)}{206265} \right) dh} \quad (65)$$

Entwickelt man sin und cos in Reihen und integrirt, so wird aus (64), wenn wir $206265 = \varrho$ setzen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{y}{h} &= \frac{1}{\varrho} \left[\frac{\mu h}{2} + \frac{r h^2}{3} + \dots \right] - \frac{1}{3! \varrho^3} \left[\frac{\mu^3 h^3}{4} + \frac{3 \mu r h^4}{5} + \dots \right] + \text{etc.} \\ \frac{x}{h} &= 1 - \frac{1}{2! \varrho^2} \left[\frac{\mu^2 h^2}{3} + \frac{2 \mu r h^3}{4} + \dots \right] + \text{etc.} \end{aligned} \right\} \quad (66)$$

Hier convergiren die rechten Seiten jedenfalls noch stärker als die Reihen für $\sin \left(\frac{\varphi(h)}{\varrho} \right)$ und $\cos \left(\frac{\varphi(h)}{\varrho} \right)$, der gröfseren Nenner wegen, mit welchen jedes Glied des quadratischen, cubischen etc. Klammerausdruckes behaftet ist. Führen wir die in (65) angedeutete Division jetzt aus und bedenken, dafs $\vartheta'' = \operatorname{tg} \vartheta \cot 1'' = \varrho \operatorname{tg} \vartheta$ gesetzt werden darf, weil ϑ selten $30'$ übersteigen wird, so erhalten wir

$$\vartheta = \left[\frac{\mu h}{2} + \frac{r h^2}{3} + \dots \right] - \frac{1}{\varrho^2} \left[\frac{\mu^3 h^3}{24} + \frac{29 \mu^2 r h^4}{360} + \dots \right] + \text{etc.} \quad (67)$$

Alle nach $\frac{\mu^3 h^3}{24 \varrho^2}$ folgenden Glieder werden, solange h die Zahl 3600 (für 1°) nicht übersteigt, verschwindend klein; auch das genannte Glied erreicht innerhalb dieser Grenze nie den Betrag von 0,1 Secunde, da μ stets nur wenig die Eins übersteigen wird, gewöhnlich sogar darunter bleibt. Gleichwohl wird die Ausführung das Glied zuweilen berücksichtigen, in der nachfolgenden Uebersicht der Rechnung aber mag es wegbleiben und wir schreiben nur

$$\vartheta \text{ (in Secunden)} = \frac{\mu h}{2} + \frac{r h^2}{3} + \frac{o h^3}{4} + \dots \quad (68)$$

und hiernach ist D , auszudrücken, indem man h durch a ersetzt.

Wollen wir den Winkel Θ kennen, den die Sehne mit der Curve an ihrem Endpunkte oder mit der Tangente der Curvenpunktes (h) bildet, so finden wir:

$$\Theta = \varphi(h) - \vartheta = \frac{\mu h}{2} + \frac{2\nu h^2}{3} + \frac{3\sigma h^3}{4} + \dots \quad (69)$$

und hiernach läßt sich, für $h = a$, auch $D_{,,}$ ausdrücken. Aus D , und $D_{,,}$ könnte man sodann die Constanten μ und ν bestimmen, also einen zweigliedrigen Ausdruck für $\varphi(h)$ finden. Es wird aber in manchen Fällen erwünscht sein, noch mehr Glieder beizuziehen, und immer, den berechneten eine grössere Genauigkeit durch Vermehrung der Beobachtungen zu geben. Da Gleichung (60) nur für einen bestimmten Zeitpunkt gilt, so können Wiederholungen nicht mehr dazu beitragen, wohl aber gleichzeitige Beobachtungen anderer Signale $S_{,,}$, $S_{,,}$ etc., welche nahezu in der Lichtcurve zwischen A , und $A_{,,}$ gelegen sind und deren Höhenlage gegenüber A , und $A_{,,}$ genau bekannt ist. Begnügen wir uns mit zweien, die auch zusammenfallen dürfen, und werde S , in der Entfernung $h = e$, zugleich mit $A_{,,}$ von A , aus beobachtet, $S_{,,}$ aber, in der Entfernung $h = e_{,,}$ mit A , gleichzeitig aus $A_{,,}$ anvisirt, so möge man aus den scheinbaren Zenithwinkeln ξ , und $\xi_{,,}$ und den für $\varrho = \infty$ berechneten Zenithwinkeln ζ , und $\zeta_{,,}$ die Differenzen bestimmt haben:

$$\left. \begin{aligned} \Delta &= \xi - \zeta = \gamma - \delta, \\ \Delta_{,,} &= \xi_{,,} - \zeta_{,,} = \gamma_{,,} - \delta_{,,} \end{aligned} \right\} \quad (70)$$

und

worin γ , und $\gamma_{,,}$ die Winkel bedeuten, die der Schnitt des Meerespiegels in A , und $A_{,,}$ mit Sehnen bildet, welche die Fußpunkte der Lothe von A , und S , einerseits und von $A_{,,}$ und $S_{,,}$ andererseits verbinden; δ , und $\delta_{,,}$ aber jene Winkel sind, welche die Lichtcurve in A , und $A_{,,}$ mit den Sehnen A,S , und $A_{,,}S_{,,}$ einschließt. Δ , läßt sich wie D , nach (68) ausdrücken, wenn man $h = e$, macht, um aber $\Delta_{,,}$ zu verwerthen, wollen wir allgemein für die Sehne, welche die Curvenpunkte (h ,) und ($h_{,,}$) verbindet, deren Neigung ϑ , und $\vartheta_{,,}$ gegen die Berührenden jener Punkte entwickeln.

Bildet man aus den Gleichungen (66), nachdem beiderseits mit h multiplicirt worden, zunächst $y_{,,}$ und $x_{,,}$ durch Einsetzen von $h_{,,}$; dann y , und x , durch Einsetzen von h , an Stelle der h und sei σ der Winkel, welchen die Sehne mit der Berührenden des Anfangspunktes bildet, so berechnet sich in ähnlicher Weise wie früher ϑ und mit Vernachlässigung der höheren Glieder:

$$\sigma = \varrho \operatorname{tg} \sigma = \varrho \cdot \frac{y_{,,} - y}{x_{,,} - x} = \frac{\mu}{2} \cdot \frac{h_{,,}^2 - h^2}{h_{,,} - h} + \frac{\nu}{3} \cdot \frac{h_{,,}^3 - h^3}{h_{,,} - h} + \dots \quad (71)$$

Aus der entsprechenden Figur, die man noch durch die Berührenden in (h ,) und ($h_{,,}$) zu vervollständigen hätte, ergäbe sich auf einfache Weise der Aussenwinkel

$$\sigma = \vartheta + \varphi(h)$$

und der Außenwinkel eines andern Dreiecks

$$\varphi(h_{,,}) = \varphi(h_1) + \vartheta_1 + \vartheta_{,,}$$

woraus folgt:

$$\vartheta_1 = \sigma - \varphi(h_1); \quad \vartheta_{,,} = \varphi(h_{,,}) - \sigma;$$

Entwickelt man (71), so erhält man

$$\sigma = \frac{\mu}{2} (h_{,,} + h_1) + \frac{\nu}{3} (h_{,,}^2 + h_{,,}h_1 + h_1^2) + \frac{0}{4} (h_{,,}^3 + h_{,,}^2h_1 + h_{,,}h_1^2 + h_1^3) + \dots$$

und daraus in Vereinigung mit den vorigen Gleichungen:

$$\vartheta_1 = \frac{\mu}{2} (h_{,,} - h_1) + \frac{\nu}{3} (h_{,,}^2 + h_{,,}h_1 - 2h_1^2) + \frac{0}{4} (h_{,,}^3 + h_{,,}^2h_1 + h_{,,}h_1^2 - 3h_1^3) + \dots \quad (72)$$

$$\vartheta_{,,} = \frac{\mu}{2} (h_{,,} - h_1) + \frac{\nu}{3} (2h_{,,}^2 - h_{,,}h_1 - h_1^2) + \frac{0}{4} (3h_{,,}^3 - h_{,,}^2h_1 - h_{,,}h_1^2 - h_1^3) + \dots \quad (73)$$

Den Winkel $\angle_{,,}$ kann man jetzt durch (73) ausdrücken, wenn darin $h_{,,} = a$ und $h_1 = e_{,,}$ genommen wird. Es ist klar, daß die Gleichungen (68) und (69) nur specielle Fälle von (72) und (73) ausprechen.

§. 27. Nach dieser Vorbereitung müssen wir kurz bei der Art verweilen, wie die Größen D und $\angle$ durch Beobachtung zu gewinnen sind. Dazu ist nicht eben nöthig, daß genau ein und derselbe Lichtstrahl der Beobachtung unterworfen, also etwa die beiden Fernrohre in A_1 und $A_{,,}$ auf ihre Fadenkreuze gegenseitig eingestellt werden, was bei großen Entfernungen seine besonderen Schwierigkeiten hat, sondern man darf annehmen, daß Lichtstrahlen, welche in geringem Abstand von einander die Luft durchdringen, den gleichen Berechnungsverhältnissen unterliegen, also gleich gekrümmt sind. Darum genügt es, wenn nahe bei den Instrumentenständen A_1 und $A_{,,}$ Signale errichtet werden. Ebenso brauchen die Zwischen-signale S nur in der Nähe der Ziellinie $A_1A_{,,}$ zu stehen und nur die Zeitersparnis macht es wünschenswerth, daß alle von einer Station anzuschneidenden Signale in Einer Verticalebene liegen. Soll aber die Ziellinie nicht zu nahe dem Erdboden hinstreichen oder die Signale keine zu bedeutende Höhe erhalten, so wird solches Terrain der Messung am günstigsten, das wie die welligen Ränder mancher Gebirgsthäler, nur in einzelnen Punkten sich der Ziellinie nähert. In allen Fällen, wo Heliotropenlicht vermieden werden kann, denken wir uns die Signale in Form weißer Holztafeln mit 2 rothen, um $\frac{3}{4}$ bis 2 Meter über einander stehenden horizontalen Streifen σ und π , scharf und parallel begrenzt und von solcher Breite, daß sie von den Ocularfäden auch

auf grössere Entfernungen nur zur Hälfte bedeckt werden. (BESSEL und BAEYER wandten als Verticalsignale Tafeln an, die um eine lothrechte Achse drehbar waren, um dadurch die sichtbare Strichbreite reguliren zu können.) Die Mittellinien jener Horizontalstreifen denken wir uns streng nivellirt und ihre Lage gegen die Fernrohrachsen sowie alle Horizontalabstände genau bekannt. Da es ebenföhr auf möglichste Vollständigkeit der Aufnahme als auf deren rasche Ausführung innerhalb Zeiträumen ankommt, in welchen die Refraction sich noch nicht wesentlich verändert hat, so wird sowohl die Zahl der Signale als auch der Fadeneinstellungen für jedes Signal eine beschränkte sein. Zwei Einstellungen genügen, um die etwa noch unbekannten Reste der Instrumentalfehler zu eliminiren, sowie um einen Maassstab für die Genauigkeit der Visur und die Unveränderlichkeit der Refraction zu erhalten, wofür die scheinbare Ruhe der Fernrohrbilder während des Anschneidens bekanntlich ein schlechtes Criterium bildet. Aus den Visuren auf beide Streifen σ und π eines Signals geht eine kleine Winkeldifferenz ε hervor, welche gleiche Grösse mit jener η haben soll, die aus dem Abstand der Streifenachsen unter sich und der Entfernung des Zieles vom Instrumente folgt und deren Vergleich mit ε den Beobachtungsfehler erkennen läst. Visirt man beide Male nur nach Einem Streifen, sodafs η Null wird, so verliert man den Vortheil, die Ablefung an verschiedenen Stellen der Kreistheilung oder Mikrometererschraube vorzunehmen und obwohl dieser Vortheil auch durch Einstellung zweier verschiedenen Ocularfäden auf das Ziel zu erreichen wäre, so entspricht doch der Fadenabstand bei terrestrischen Messungen, wegen der wechselnden Ocularstellung, keiner constanten Winkelgrösse mehr. Denken wir uns ausser in A_1 und A_{II} noch 4 Signale in den Punkten S_1 bis S_{IV} errichtet, von denen auch je zwei vereinigt sein könnten, da von A_1 aus nur S_1 und S_{III} , von A_{II} aus nur S_{II} und S_{IV} angeschnitten werden sollen, so möge die Aufnahme in folgender Ordnung vor sich gehen: aus A_1 sollen zuerst die Streifen σ der Signale S_1 ; S_{III} ; A_{II} , dann die Streifen π der Signale A_{II} ; S_{III} ; S_1 anvisirt werden, aus A_{II} ähnlich zuerst die σ in S_{II} ; S_{IV} ; A_1 ; sodann die π in A_1 ; S_{IV} ; S_{II} . Die symmetrische Anordnung der Aufnahme eliminirt kleine Refractionsänderungen, wenn diese nur in Einem Sinne und der Zeit proportional erfolgten. Befäsen die beiden Instrumente in A_1 und A_{II} Fernrohre wie die des bayerischen Nivellirapparats, so könnte man als höchste Leistung (s. p. 56) von ihnen den wahrscheinlichen Fehler $\pm 1''$ auf die einzelne Visur erwarten und müste, um dessen versichert zu sein, die zulässige Fehlergrenze in ein ähnliches Verhältniss V , zum gewünschten wahrscheinlichen Fehler bringen, wie jenes, welches bei dem bayerischen Nivellement obgewaltet hat und im 2. Cap. empirisch festgestellt wurde. Da nämlich, wie Seite 53 bemerkt worden, die Fehlergrenze für die einzelne Visur sich aus $\sqrt{\frac{3z}{2}}$ dmm berechnet, der wahrscheinliche Visurfehler aber nach (46),

wenn ϑ und m gleich Eins werden, $0,4691 \sqrt{2}$ beträgt, so wird

$$V_1 = \frac{\sqrt{3}}{0,4691 \sqrt{2}} = 2,611.$$

Die Fehlergrenze für die Differenz zweier Visuren stellt sich $\sqrt{2}$ mal so hoch als die für die einzelne und man hätte demnach alle Beobachtungen auszuscheiden, aus welchen die (absolut genommene) Differenz

$$\varepsilon - \eta > \pm V_1 \times \sqrt{2} \times 1'' \text{ oder } > \pm 3'',692$$

hervorginge: eine strenge Bedingung, selbst für Instrumente mit noch stärkeren Fernrohren, wie Jeder weiß, der solche Messungen terrestrischer Zenithdistanzen mittelst feiner Instrumente schon vorgenommen hat. Wir betrachten sie aber als erfüllt und setzen im Folgenden den wahrscheinlichen Fehler einer Visur gleich $1''$ und den wahrscheinlichen Fehler pro Signal, also des Mittels aus 2 Einstellungen, gleich $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ oder nahe $0,7''$; sodafs, da wir die Fehler in den Winkeln ε und ζ , welche von der Längenmessung und dem Nivellement herrühren, vorläufig ignoriren, die Gröfsen D_1 , D_{11} , A_1 und A_{11} in (62) und (70) alle mit dem wahrscheinlichen Fehler $\pm 0,7''$ behaftet sind, der Summe je zweier, z. B. $D_1 + D_{11}$, aber der wahrscheinliche Fehler $\pm 1''$ zukommt.

§. 28. Gehen wir nun über zur Berechnung der Constanten μ ; ν in Gleichung (60) und ihrer wahrscheinlichen Fehler, und beschränken uns dabei auf vorgenannte 4 Beobachtungsgröfsen; ebenso auf 2 Constanten, μ und ν . Diese Einschränkung der Constantenzahl rechtfertigt sich durch die verhältnismässige Unsicherheit der Glieder höherer Ordnung und auch jetzt noch ist die Zahl der überschüssigen Beobachtungen (zwei) zu gering zur Bestimmung des wahrscheinlichen Fehlers aus den übrigbleibenden Fehlern. Wir verzichten deshalb auf diese Art feiner Berechnung und machen statt dessen Gebrauch von einem Verfahren, welches uns auch bei dem Mangel aller überschüssigen Beobachtungen gestattet wäre, da die Methode der kl. Qu. auch in diesem Falle die Gewichte von μ , ν , σ liefert. Haben wir nun auf anderem Wege Kenntnifs vom wahrscheinlichen Fehler der Gewichtseinheit gewonnen, so werden wir diesen durch die Quadratwurzel aus den Gewichten der Constanten der Reihe nach dividiren, um deren wahrscheinliche Fehler zu erhalten. Wir wollen uns hier erlauben, statt des wahrscheinlichen Fehlers der Gewichtseinheit jenen der Beobachtungseinheit, nämlich $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ Secunden, einzuführen, womit freilich die Bedingung verknüpft ist, dafs die wahre Gestalt der Curve $\varphi(h)$ durch 2 Constanten vollkommen wiedergegeben werden könne, dafs also wirklich nur Beobachtungsfehler vorliegen, nicht auch Fehler wegen Unsicherheit dieser Hypothese.

Drücken wir die Beobachtungsgrößen $D,; D,,; \mathcal{A},; \mathcal{A},,$ nach der Reihe mittelst der Gleichungen (60), (68) und (73) aus, so erhalten wir folgende 4 Bedingungsgleichungen von gleichem Gewicht:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} a \mu + \frac{1}{3} a^2 v &= D, \\ \frac{1}{2} a \mu + \frac{2}{3} a^2 v &= D,, \\ \frac{1}{2} e, \mu + \frac{1}{3} 2 e,^2 v &= \mathcal{A}, \\ \frac{1}{2} (a - e,,) \mu + \frac{1}{3} (2a + e,,) (a - e,,) v &= \mathcal{A},, \end{aligned} \right\} \pm \frac{1}{2} \sqrt{2} \text{ Sec.} \quad (74)$$

aus denen sich unter Anwendung der Methode der kl. Qu., wenn wir, was ja in unfrer Macht liegt, Kürze halber $e, = a - e,, = e$ nehmen, folgende Endgleichungen berechnen:

$$\left. \begin{aligned} 0 &= -\frac{1}{2} [a (D, + D,,) + e (\mathcal{A}, + \mathcal{A},,)] + \\ &\quad + \frac{1}{2} (a^2 + e^2) \mu + \frac{1}{2} (a^3 + a e^2) v \\ 0 &= -\frac{1}{3} [a^2 (D, + 2D,,) + e^2 \mathcal{A}, + (3a - e) e \mathcal{A},,] + \\ &\quad + \frac{1}{2} (a^3 + a e^2) \mu + \frac{1}{9} [5a^4 + e^4 + e^2 (3a - e)^2] v \end{aligned} \right\} \quad (75)$$

Um aus der Auflösung der Endgleichungen (75) übersichtliche Ausdrücke zu erhalten, setzen wir $e = \lambda a$, wobei λ meist ein ächter Bruch und, wie sich später zeigt, am günstigsten etwa gleich $\frac{3}{4}$ gewählt wird. Dann folgt, immer unter Annahme des wahrscheinlichen Fehlers $\pm \frac{1}{2} \sqrt{2}$ Secunden für die Gewichtseinheit:

$$v = -\frac{3}{a^2} \cdot \frac{D, - D,, + (3\lambda - 2\lambda^2)(\mathcal{A}, - \mathcal{A},,)}{1 + 9\lambda^2 - 12\lambda^3 + 4\lambda^4} \pm \frac{3}{a^2} \sqrt{\frac{1}{1 + 9\lambda^2 - 12\lambda^3 + 4\lambda^4}} \quad (76)$$

$$\mu = \frac{2}{a} \left\{ \begin{aligned} &2D, - D,, + (5\mathcal{A}, - 4\mathcal{A},,) \lambda \\ &+ 3(2D, + D,, - \mathcal{A}, + \mathcal{A},,) \lambda^2 \\ &- 3(2D, + 2D,, - 3\mathcal{A},) \lambda^3 \\ &+ (2D, + 2D,, - 9\mathcal{A}, - 3\mathcal{A},,) \lambda^4 \\ &\quad + 2(\mathcal{A}, + \mathcal{A},,) \lambda^5 \end{aligned} \right\} : (1 + 9\lambda^2 - 12\lambda^3 + 4\lambda^4) \times (1 + \lambda^2)$$

$$\pm \frac{\sqrt{2}}{a} \sqrt{\frac{5 + 9\lambda^2 - 6\lambda^3 + 2\lambda^4}{1 + 10\lambda^2 - 12\lambda^3 + 13\lambda^4 - 12\lambda^5 + 4\lambda^6}} \quad (77)$$

Dies zeigt, dass bei gleichem λ die wahrscheinlichen Fehler der Größen μ und v , erstere im einfachen, letztere im quadratischen umgekehrten Verhältniss mit a abnehmen, auch beweist die Form der Wurzelgrößen, namentlich der zweiten Glieder im Zähler und Nenner, dass deren Werth für $\lambda = 0$ ein grösster ist und von da an mit wachsendem λ vorerst abnimmt. So wird der wahrscheinliche Fehler des v aus (76), den wir allgemeiner durch $\pm \frac{[v, \lambda]}{a^2}$ bezeichnen wollen,

$$\text{für } \lambda = 0 : \quad \pm \frac{3''}{a^2} \quad (\text{Maximum})$$

$$,, \lambda = 0,25 : \quad \pm \frac{3}{a^2} \sqrt{\frac{64}{89}} = \pm \frac{2'',5440}{a^2}$$

$$,, \lambda = 0,50 : \quad \pm \frac{3}{a^2 \sqrt{2}} = \pm \frac{2'',1213}{a^2}$$

$$,, \lambda = 0,75 : \quad \pm \frac{3}{a^2} \sqrt{\frac{64}{145}} = \pm \frac{1'',9930}{a^2} \quad (\text{Minimum})$$

$$,, \lambda = 1,00 : \quad \pm \frac{3}{a^2 \sqrt{2}} = \pm \frac{2'',1213}{a^2}$$

$$,, \lambda = 1,50 : \quad \pm \frac{3''}{a^2} \quad (\text{Maximum})$$

Der wahrscheinliche Fehler des μ werde durch $\frac{[\mu, \lambda]}{a}$ bezeichnet; er wird

$$\text{für } \lambda = 0 : \quad \pm \frac{\sqrt{10}}{a} = \pm \frac{3'',1623}{a} \quad (\text{Maximum})$$

$$,, \lambda = 0,25 : \quad \pm \frac{\sqrt{2}}{a} \sqrt{\frac{5608}{1513}} = \pm \frac{2'',7227}{a}$$

$$,, \lambda = 0,50 : \quad \pm \frac{\sqrt{2}}{a} \sqrt{\frac{53}{20}} = \pm \frac{2'',3022}{a}$$

$$,, \lambda = 0,75 : \quad \pm \frac{\sqrt{2}}{a} \sqrt{\frac{8360}{3625}} = \pm \frac{2'',1476}{a}$$

$$,, \lambda = 1,00 : \quad \pm \frac{\sqrt{2}}{a} \sqrt{\frac{10}{4}} = \pm \frac{2'',2361}{a}$$

$$,, \lambda = 1,50 : \quad \pm \frac{\sqrt{2}}{a} \sqrt{\frac{121}{26}} = \pm \frac{3'',0508}{a}$$

Beide vorstehende Reihen von Fehlerwerthen zeigen, daß die beliebige Vergrößerung des Abstandes $e = \lambda a$ eines Zwischensignals vom Instrument nicht unbedingt günstig auf die Genauigkeit des Resultats influirt, sondern daß die günstigste Lage der Zwischen-signale von ihrer Zahl, oder besser gesagt von der Zahl der Bedingungsgleichungen abhängt.

Ist aber jene Lage und diese Zahl einmal festgesetzt, in unfrem Falle also die Gröfse λ gegeben, so können die Fehler der Constanten μ und ν nur noch durch Vergrößerung von a , des Abstandes beider Instrumente, verringert werden. Die fraglichen Fehler gehen unverändert auf die Gleichungen (58) oder (59) über, je nachdem man die Erdkrümmung $F(h)$ aus $f(h) + \varphi(h)$ oder die Refraction aus $F(h) - \varphi(h)$

zu bestimmen wünscht, wenn nämlich im ersten Falle $f(h)$, im zweiten $F(h)$ als fehlerfrei betrachtet werden können. Sehen wir ab von der Unmöglichkeit, diese letztere Bedingung zu erfüllen und beschränken uns darauf, die Fehler der Function $\varphi(h)$ auch in das gesuchte $F(h)$ oder $f(h)$ einzusetzen, so läßt sich das Fehlerquadrat der in letzter Linie verlangten Gleichung der Erdkrümmung oder Lichtcurve ausdrücken durch:

$$\Phi^2 = \frac{[\mu, \lambda]^2 h^2}{a^2} + \frac{[\nu, \lambda]^2 h^4}{a^4} \quad (78)$$

und für $h = a$ durch:

$$\Phi_a^2 = [\mu, \lambda]^2 + [\nu, \lambda]^2$$

und dieser von a befreite Ausdruck ist am schicklichsten zum Vergleich verschiedener Fälle. Mit Rücksicht auf (76) und (77) kann man ihn auch schreiben:

$$\Phi_a^2 = \frac{19 + 27\lambda^2 - 12\lambda^3 + 4\lambda^4}{1 + 10\lambda^2 - 12\lambda^3 + 13\lambda^4 - 12\lambda^5 + 4\lambda^6} \quad (79)$$

und folgende Reihe von Zahlenwerthen daraus ableiten:

λ	Φ_a^2	Φ_a
0	19,0	4'',3589
0,25	$\frac{21008}{1513} = 13,8850$	3'',7263
0,50	$\frac{49}{5} = 9,8$	3'',1305
0,75	$\frac{31120}{3625} = 8,5848$	2'',9300
1,00	$\frac{38}{4} = 9,5$	3'',0822
1,50	$\frac{59,5}{3,25} = 18,3077$	4'',2779

Genauer als aus dieser Uebersicht finden wir die zwischen $\lambda = 0$ und $\lambda = +2$ gelegenen Grenzwerte von Φ_a nach Auflösung der Gleichung

$$\lambda^8 - 6\lambda^7 + 22,5\lambda^6 - 33,75\lambda^5 + 33,6875\lambda^4 - 42\lambda^3 + 30,375\lambda^2 - 20,25\lambda + 10,1875 = 0$$

deren Wurzeln 0,7692 und 1,499, erstere dem kleinsten, letztere einem größten Werth von Φ_a entsprechen. Es zeigt sich

$$\text{für } \lambda = 0,7692 : \Phi_a^2 = 8,5790; \Phi_a = \pm 2'',929$$

als der geringste Betrag des wahrscheinlichen Fehlers, mit welchem die Functionswerthe $\varphi(a)$ und somit, obiger Voraussetzung nach, auch

$F(a)$ oder $f(a)$ behaftet sein werden. Der absolute Werth dieses Fehlers ist unabhängig von der GröÙe des Erdbogens a , doch liegt es in unsrer Hand, ihn zu dieser GröÙe in ein richtiges Verhältniß zu setzen, wenn wir den Abstand a der beobachtenden Instrumente hinreichend vergrößern. Damit das Verhältniß $\Phi_a : a$ die Zahlen 0,001; 0,01; 0,1 nicht übersteige, darf jener Abstand nicht unter $2929'' = 48'49''$ des Erdbogens; dann $293'' = 4'53''$ und endlich $29,3''$ oder etwa 900^m gewählt werden. Nähme man a nur gleich 150^m oder etwa 5 Erdbogensecunden, so würde uns erst die 36fache Wiederholung der ganzen Aufnahme versichern, daß der wahrscheinliche Fehler von $F(a)$ oder $f(a)$ innerhalb $\frac{1}{10}a$ bleibt, und die 3600fache Wiederholung, daß er $\frac{1}{100}a$ nicht übersteigt. Noch weit größer werden diese Zahlen bei anderer Anordnung der Aufnahme, wenn also λ einen anderen Betrag als etwa $\frac{3}{4}$ erhält. Auch gilt hier stets die strenge Voraussetzung, daß der wahrscheinliche Beobachtungsfehler für jedes Signal nur $\frac{1}{2}\sqrt{2''}$ betrage.

Hier diene uns die GröÙe $\varphi(a)$ und ihr wahrscheinlicher Fehler Φ_a , aus dem für $\varphi(h)$ gefundenen allgemeinen Ausdruck rückwärts berechnet, als Prüfstein für die Genauigkeit des letzteren und es liegt nicht etwa ein Widerspruch darin, daß Φ_a größer ausfällt, als der wahrscheinliche Fehler der einzelnen Beobachtung von $\varphi(a) = D, - D_{,,}$ (62 u. f.), den wir gleich $1''$ setzten. Denn die einzelne Beobachtung läßt sich weiter nicht zur Bestimmung von $F(a)$ oder $f(a)$ nach unsrer Absicht verwerthen, ehe die inneren Eigenschaften von $\varphi(h)$ bekannt sind; um diese aber zu erkennen, bedurften wir auÙer jener einen noch 3 andere Beobachtungen und erreichten dennoch nicht dieselbe Sicherheit für $\varphi(a)$, aus dem Bau der Curve $\varphi(h)$ abgeleitet, wie für die einzelne Messung von $\varphi(a)$. Hätten wir 4 Constanten beibehalten statt deren nur zwei, so wäre die Unsicherheit in $\varphi(h)$ noch gewachsen und der oben berechnete wahrscheinliche Fehler Φ_a ist also noch zu klein, wenn die wirkliche Gestalt der durch (60) ausgedrückten Curve innerhalb $A, A_{,,}$ von der Form $\varphi(h) = \mu h + \nu h^2$ abweicht. Zu groß ist Φ_a nur dann berechnet, wenn die wahre Gestalt von $\varphi(h)$ ein Kreis ist. Bedenkt man nun, daß, um von $\varphi(h)$ etwa auf $F(h)$, die Gleichung der Erdkrümmung, zu schließen, mit Φ_a sich noch der ganze wahrscheinliche Fehler der Function $f(h)$, der Strahlenbrechung nämlich, vereinigt: so wird uns die weise Zurückhaltung unsrer Vorfahren dem zu Eingang dieses Capitels erwähnten Projecte gegenüber begreiflich, denn ihnen standen noch keine Höhenkreise mit Mikroskop-Ablefung zu Gebote und es lag noch nicht in ihrer Macht, den wahrscheinlichen Visirfehler des achromatischen Fernrohrs auf $1''$ einzuschränken. Auch heute noch möchte es bedenklich scheinen, wollte man Untersuchungen über Erdkrümmung auf Standlinien von weniger als 1 Kilometer Länge vornehmen, selbst wenn wir die Strahlenbrechung fehlerfrei in die Rechnung einführen könnten. Nicht nur, daß der wahrscheinliche Fehler Φ_a dann in den meisten Fällen die Abweichung des wahren Erdbogens von dem Bogen a des mittleren Sphäroids überschreiten

würde, es träte auch beim Zusammensetzen mehrerer solcher kleinen Stücke eine starke Fehleranhäufung hinzu, die dem Resultat allen wissenschaftlichen Werth raubte.

Gilt es statt dessen auf dem angegebenen Wege, und unterstützt durch eine auf astronomische Beobachtung gegründete Kenntniss der Erdkrümmung, die Gleichung (59) für die Refraction zu bestimmen, so haben zahlreiche frühere Versuche schon festgestellt, dass der ungefähre Mittelwerth von $f(h) = \frac{h}{7}$. Der oben berechnete wahrscheinliche Fehler Φ_a überschreitet diese Grösse, wenn $h = a = 20'',5$ und darunter. Man wird also auf so kleinen Standlinien nur abnorme Refractionsercheinungen mit Sicherheit constatiren können. Indessen tritt bei dieser Aufgabe der günstige Umstand ein, dass die relative Genauigkeit der astronomischen Bestimmung der Standlinie A, A'' , proportional ist, da der wahrscheinliche Fehler der Polhöhemessungen und der daraus berechneten Amplituden niemals von dem gegenseitigen Abstand der Stationen abhängt. Selbst wenn man an Stelle eigener Beobachtungen die BESSEL'schen Dimensionen in die Rechnung einführt, wird der Fehler um so kleiner, je grösser A, A'' . Nicht daselbe liess sich bei der vorhin betrachteten Aufgabe von der Refractionsgrösse sagen.

§. 29. Je schwieriger sich die Lösung beider vorbehandelten Probleme in der Ausführung gestaltet, um so mehr wird verlangt, dass die Grundlage für Berechnung der Zenithwinkel z und ζ , welche sich auf den Krümmungsradius der Erde $\varrho = \infty$ beziehen, vollkommen zuverlässig sei und diese Grundlage wird durch Horizontal- und Höhenmessungen gebildet, von deren Fehlern wir bisher in diesem Capitel ganz abfahen. Sei e der Abstand eines Signales S vom Instrument, x der Höhenunterschied beider und y der Höhenwinkel für $\varrho = \infty$, so wird in Secunden:

$$y = \frac{x}{e} \operatorname{tg} 1'' \quad (80)$$

Setzen wir fest, dass der Fehler $\pm \Delta y \leq 0,33''$, so wird der Beobachtungsfehler pro Signal, den wir zu $\pm 0,7''$ berechneten, nur auf $\pm \sqrt{0,7^2 + 0,33^2} = \pm 0,77$, also nicht sehr beträchtlich erhöht, und jene Bedingung scheint leicht erfüllbar, wenn Δy nur vom Nivellirfehler und zwar nur von jenem Theil abhinge, der mit der Wurzel aus der Entfernung wächst. Setzen wir nach (42) für das bayer. Nivellement

$$S = 9.84 \sqrt{\frac{\vartheta}{6e}} \text{ Secunden}$$

und darin $\vartheta = 1$; $S = \pm 0,33''$, so wird $e = 160^m$ und dieser sowie jeder grössere Werth genügt obiger Forderung, ja der Minimalwerth von e lässt sich noch in demselben Verhältniss mit ϑ herabsetzen.

Wir wissen aber aus (43) und den später daran geknüpften Betrachtungen, daß jener Fehler der Präcisionsnivellements bei Weitem überwiegt, welcher dem Höhenunterschied proportional ist. Ebenso verhält es sich mit der Messung des Horizontalabstandes und wir wollen annehmen, daß der wahrscheinliche Längenfehler ψ für die Maßeinheit bei der Höhen- und Längenmessung derselbe sei; dann erhalten wir durch Differenziren aus (80), wenn wir an Stelle der Differenziale wahrscheinliche Fehler setzen:

$$\pm \frac{\Delta y}{\operatorname{tg} 1''} = \pm \frac{\Delta x}{e} \pm \frac{x \Delta e}{e^2} = \pm \frac{\psi x}{e} \pm \frac{\psi e x}{e^2} = \pm \frac{\psi x}{e} \sqrt{2}$$

oder

$$\pm \Delta y = \pm y \psi \sqrt{2}$$

Nach (47) u. ff. fanden wir den Minimalwerth von ψ für die Höhenunterschiede: $\psi = \pm 0,000071$, woraus folgt

$$\Delta y = 0,0001 y.$$

Daraus geht hervor, daß y nicht mehr als 3300'' oder 55' betragen darf, wenn $\pm \Delta y \leq 0,33''$ bleiben soll. Diese Grenze für y erweitert sich bis auf das 1,4fache, sobald entweder die Horizontal- oder die Verticalmessung mit einem wesentlich geringeren Fehler behaftet ist, verengt sich aber, wenn bei der Höhenmessung verlorne Steigung vorkommt. Dem Verticalwinkel $\pm 55'$ entspricht die Steigung 3300 : 206265 = 1 : 62,5; also würde die Visur längs einer schiefen Ebene von der Steigung 1 : 40 obiger Bedingung nicht mehr entsprechen, auch wenn das Nivellement ohne verlorne Steigungen ausgeführt worden wäre.

Die Betrachtungen dieses Capitels können uns somit nur in dem Wunsche bestärken, daß es gelingen möge, unfre Präcisionsnivellements von dem Fehler wegen unsicherer Scaleneinheit zu befreien.

Cap. IV. *)

§. 30. Beurtheilten wir im Vorigen, wie weit die Ergebnisse geometrischer Nivellements die technischen Voraussetzungen bestimmter wissenschaftlicher Probleme erfüllen, so haben wir uns nun noch mit der allgemeineren Aufgabe zu beschäftigen: der Vereinigung getrennt ausgeführter, sich aber in mehreren Punkten berührender Nivellements zu einem widerspruchsfreien und der Wahrheit nahekommenden Resultat; dann der Abschätzung seiner Genauigkeit.

Höhenpunkte, welche durch mindestens drei selbständige Nivellements mit einem oder mehreren anderen Punkten verknüpft sind,

*) Erst während des Druckes der Abhandlung beigelegt.

nennen wir Knotenpunkte, zum Unterschied von den Zwischenpunkten, bei welchen die Zahl der Verbindungen geringer ist. Nivellements, welche mehrere Höhenpunkte so verbinden, daß jeder Höhenunterschied auf zweierlei Weise, und nur auf zweierlei, bestimmbar ist, bilden Polygone oder Schleifen. Sind zwei Punkte einer Scheife noch außerdem durch ein (drittes) Nivellement verbunden, so werden sie die Knotenpunkte zweier Nachbarschleifen u. s. w. Durch Neben- und Ineinandergruppieren mehrerer Schleifen mit gemeinsamen Knotenpunkten entsteht ein Höhennetz und man könnte darin Knotenpunkte erster, zweiter, dritter etc. Ordnung unterscheiden, je nach der Zahl der Nachbarknotenpunkte, mit welchen dieselben direct verbunden sind.

Alle diese Höhenpunkte, wenn sie zum Anknüpfen örtlich und zeitlich verschiedener Höhenbestimmungen dienen sollen, müssen deutlich bezeichnet und von unwandelbarer Lage sein. Einer großen Anzahl sehr brauchbarer Bahn- und Wegnivellements ist durch den Mangel dauerhafter Höhenmarken nicht ihr technischer Nutzen, aber ihr wissenschaftlicher Werth genommen worden. Manche derselben könnten sonst mit gleichem Recht für Präcisionsnivellements gelten, wie einige so benannte, die aber mit schlecht getheilten, unverglichenen und unvergleichbaren Latten, enormen Zielweiten und mittelmäßigen Instrumenten aufgenommen worden sind. Wir wollen daher zunächst unsere Aufmerksamkeit auf Form, Lage und Zugänglichkeit der Höhenmarken richten.

Für Präcisionsnivellements hat man zwei Hauptarten von Marken eingeführt, horizontale Flächen, welche die Zielscala unmittelbar aufzusetzen gestatten, und Zeichen in Verticalwänden, deren Höhenlage auf die danebenstehende Ziellatte durch Vermittelung eines Werkzeuges, des Lattenschiebers, übertragen werden muß. Dem Vorzug der ersteren Gattung stehen auch Nachtheile gegenüber, welche je nach der Form der gebrauchten Ziellatten, namentlich der Lattenfüsse, verschieden stark sich geltend machen. Es ist schwer und wird selten streng ausgeführt, die Lattenenden senkrecht zu ihrer Längsachse abzugleichen, so daß, wenn die lothrechte Latte auf einer horizontal geebneten Fläche ruht, diese in allen Punkten den Lattenfuß berührt. Die schief abgeschnittene Lattensohle dagegen wird, über schmalen Horizontalflächen stehend, auf verschiedene Höhen gebracht, je nachdem die Fläche nur unter die Mitte, oder auch unter eine oder beide Seitenkanten der Sohle reicht. Es wären demnach flach gewölbte oder stumpf pyramidal geformte Fixpunkte, wie die Nägel auf den (zu kürzerer Dauer bestimmten) Fixpfählen, vorzuziehen, weil sie den flachen Lattenfuß nur in einem (ein für allemal gewählten) Punkte berühren, nützten sich nicht solche metallene Knöpfe oder Spitzen verhältnißmäßig leicht ab. Besser ist es, die Ziellatte mit einem metallenen Absatz zu versehen, dessen Sohlenfläche bei geringem Durchmesser leichter senkrecht zur Achse abgedreht werden kann als das breite Endbeschläge, auch den Fixpunkt in weniger Punkten berührt

als dieses. Ist der Absatz aus Stahl gefertigt, so braucht man seine geringe Abnützung nicht zu fürchten, da nur jener ganz verschwindende Betrag derselben wirksam bleibt, der während des Uebergangs von einem Fixpunkt auf seinen nächsten Nachbar entsteht. Solange die Lage der Lattensohle gegen den Nullpunkt der Scala als constant gelten kann, braucht man sie, wie schon pag. 63 erwähnt, gar nicht zu kennen. Schliesst man nur an Höhenmarken der zweiten Gattung (in Verticalwänden) an, so wird diese Lage vollends gleichgültig und nur, wenn man wechselsweise von Horizontalflächen auf Verticalmarken übergeht, muss sie bekannt sein. Dann genügt aber einmalige Bestimmung nicht, sondern es bedarf öfterer Untersuchung, ob die Sohle unverändert blieb.

Dennoch ist der Fall der Verwendung beider Arten von Marken nebeneinander der häufigere. Will man Nivellements zu wirthschaftlichen Zwecken auf die Ergebnisse der Präcisionsmessung stützen, so sind die Horizontalflächen den gewöhnlichen Nivellirlatten zugänglicher, doch kann man nicht leugnen, dass sie mehr als die zweite Gattung Veränderungen ausgesetzt sind durch Abnützung, Verwitterung oder Rost, gewaltsames Heben beim Gefrieren der Steinfeuchtigkeit u. dgl. Zudem ist es nicht leicht, genau horizontale Flächen von einiger Grösse in Stein herzustellen. Wäre die dabei benützte Dosenlibelle nach 1^m Radius geschliffen und der Fixpunkt 0,1^m breit, so würde für jedes Millimeter Libellenausschlag eine Höhendifferenz von 0,1^{mm} innerhalb des Fixpunktes zu befürchten sein und bei mangelhafter Aufsicht können solche Differenzen bis zu 0,5^{mm} und mehr vorkommen. — Um zu erreichen, dass die Nivellirlatte stets auf gleiche Höhe aufgesetzt würde, wandte man in Württemberg Glasmarken an, welche mit einem niederen cylindrischen Anguss von gleichem Durchmesser wie der Absatz des Lattenfusses versehen sind. Wurde dessen Sohle mit der Oberfläche jenes Angusses in Berührung gebracht, so legte sich ein Metallring um beide und verhinderte das Hinabgleiten auf tiefere Punkte der Oberfläche. Diese darf also auch etwas schief stehen und bei der Schwierigkeit, solche Glasmarken in feuchten Cementmörtel genau einzusetzen, tritt das leicht ein. — In Bayern liess man in rauhe und bröckelnde Steine (Nagelfluh) der Kunstbauten ebengeschiffene Cementplatten von 0,1^m Seite ein und versicherte deren horizontale Lage bei aufgelegter Dosenlibelle in einem Bett von Cementmörtel. Solche Fixpunkte machten jedoch dem Steinhauer weit mehr Mühe als jede andere Art und sie wurden darum nur im Nothfall angewandt. — In der Schweiz wurden nach französischem Vorgang auf ähnliche Weise abgeschliffene Bronzeplatten in Felsen, Decksteine von Kunstbauten der Strassen und Eisenbahnen, Treppenstufen etc. eingelassen. Neben diesen gekünstelten Horizontalmarken wurden in allen Ländern noch bloße Steinflächen als Fixpunkte benützt und theils mit grosser, theils mit sehr wenig Sorgfalt geglättet.

Zuverlässiger im Ganzen, unveränderlicher in ihrer Lage und ganz unzweideutig in Bezug auf Wahl des Höhenpunktes sind die Marken,

welche auf WEISBACH's Veranlassung in dem gröfseren Theile von Deutschland eingeführt wurden. Cylindrische Messingbolzen mit konischen Köpfen werden in horizontalen Bohrlöchern durch Bleiringe angetrieben und dann noch mit Cementmörtel verstrichen, sodafs bloss die Vorderfläche des Cylinders sichtbar bleibt. Deren Mitte ist durch ein 2^{mm} weites und 1^{cm} tiefes Bohrloch bezeichnet, dessen horizontale Achse den Höhenpunkt markirt. Vor dem Verstreichen der Fuge mit Cement läfst das umgebende weiche Blei eine ganz feine Einstellung zu, die mittelst des stählernen Centrirstiftes, welcher in das Bohrloch paßt, und mittelst einer Libelle controlirt wird. Der verhärtende Cement verhindert darauf jede Veränderung der Bolzenlage, solange die für die Marke erwählte Mauer oder Felswand in Ruhe bleibt. Vor dem Bolzen brachte WEISBACH, zur Zierde und zur Erleichterung des Auffuchens, eine gusseiserne Platte mit der Aufschrift »Höhenmarke« und einem Bohrloch an, welches mit jenem des Bolzens die Achse gemein haben soll. In verputzte Wände wird diese Platte bis auf den Stein eingelassen, da der Bolzen nie aus der Steinwand hervorragen darf. Die Verbindung der Eisenplatte mit der Mauer durch Holzdübel und Schrauben wird verstärkt, wenn man die Plattenösen mit Cementputz überstreicht, wie es bei beworfenen Wänden stets geschieht. Ausser dieser Sicherung gegen Witterungseinflüsse verlangen die Platten in Rücksicht auf unsere Culturzustände noch eine weitere dadurch, dafs man sie nur an beaufsichtigten Gebäuden anbringt, wie Kirchen, Stationshäuser, Bahn- und Wegbrücken, oder in Felswänden nahe der Bahn etc.

Diese Gattung von Höhenmarken erfordert, und das ist der gröfste gegen sie erhobene Einwand, eigene Vorrichtungen, damit ihre Höhe auf Ziellatten gewöhnlicher Art abgelesen werden kann. Die von WEISBACH benützte: ein an der Latte verschiebliches, rechtwinkelig abgebogenes Lineal, dessen wagrechte Oberkante die Mitte des Bohrlochs im Bolzen treffen soll, läfst keine Fehlercompensation und keine sehr scharfe Einstellung zu. Besser ist der bayerische Lattenschieber: ein einfaches Holzlineal, welches die Lattenkante eigentlich nur in 2 Punkten zu berühren braucht, gleitet an dieser auf und nieder, während eine Marke mit Millimetertheilung daneben über die Scala schleift. Rechtwinklig zur Lattenkante und parallel mit der Scalenfläche biegt sich ein leichtes, etwa 0,2^m langes Diopterlineal mit feinen Horizontalspalten und runden Visirlöchern ab, durch welche man auf das Bohrloch des Messingbolzens zielen kann, während die Dosenlibelle der Nivellirlatte einspielt. Um aber dessen Achse sicher zu treffen, steckt man einen kurzen metallenen Centrirstift mit horizontal gerichteter Mittelschneide hinein und zielt auf diese. Durch Anlegen des Schiebers an die zweite Lattenkante und Wiederholung der Procedur, die nur wenig Zeit beansprucht, werden, vorausgesetzt dafs beide Lattenkanten parallel sind, fast alle Fehler compensirt, nämlich der Fehler im rechten Winkel zwischen Visirlinie und Lattenkante und jener in der Correctur der Lattenlibelle, soweit er die Richtung der

Visirlinie ändert. Geht die Schneide des Centrirstiftes nicht durch dessen Achse, so muß auch er um 180° gedreht werden. Denkt man sich die Latte auf dem halbkugeligen Stahlknopf der Fußplatte ruhend und den Lattenschieber berichtigt, so gehen die Schenkel des rechten Winkels zwischen Dioptervisur und Lattenachse beim Anvisiren stets durch den Knopfmittelpunkt einerseits und die Markenmitte andererseits, wie schief auch die Latte stehe. Ist a der schiefe, b , der horizontale und h , der Verticalabstand des Knopfmittelpunktes von der Marke, β der Winkel, den die Lattenkante mit der Verbindungslinie jener beiden Punkte (Marke und Fußpunkt) einschließt, und bezeichnet h allgemein den Abstand der Visirlinie von der Knopfmitte, so wird $h = a \cos \beta$; also $\Delta h = -a \sin \beta \Delta \beta$; da hierin $\sin \beta = b/a$ für $\sin \beta$ gesetzt werden darf, so folgt $\Delta h = \pm b \Delta \beta$ und als Maximalwerth $\Delta h = \pm 0,5^{\text{mm}}$, wenn man annimmt, daß die Lattenlibelle mit 1^{m} Radius geschliffen sei und Ausschläge von 2^{mm} , wobei $\Delta \beta = 1 : 1000$, vorkommen könnten, b , aber nicht $0,5^{\text{m}}$ überschreite. Der Visurfehler kommt nach STAMPFER's Versuchen bei so kurzer Distanz gar nicht in Betracht. In Wirklichkeit gehören die Maximalfehler von $0,5^{\text{mm}}$, welche sich jedoch für $b = 0,25^{\text{m}}$ oder deutliche Sehweite auf die Hälfte reduciren, zu den größten Seltenheiten, da extreme Schiefstellungen der Latte nie von einiger Dauer sind. Die bayr. Aufnahmehefte weisen nach, daß bei 5facher Visur an jeder Lattenkante und bis zu $b = 0,5^{\text{m}}$ die wahrscheinlichen Fehler des Mittels stets innerhalb einiger Hunderttheile des Millimeters bleiben.

Höhenmarken von ganz unveränderlicher Lage lassen sich kaum oder nur mit unverhältnißmäßigem Aufwand herstellen. Der Träger jeder über dem Erdboden angebrachten Marke ist durch die Wärme ausdehnbar. Welchen Einfluß der tägliche Lauf der Sonne auf Mauerwerk ausübt, das zeigt sich deutlich in den Neigungen und Drehungen, denen hohe Thürme unterworfen sind. Erstere hat man mittelst fixirter Libellen, letztere bei Horizontalwinkelmessungen beobachtet. Wäre der Dehnungscoefficient des Mauerwerks gleich $1 : 10^5$, ungefähr wie für Glas, so gäbe eine Temperaturdifferenz von nur 20°C schon $0,2^{\text{mm}}$ Höhenunterschied pro Meter, also schon 1^{mm} bei Fixpunkten auf 5^{m} hohen Brücken. Man wird also hohe Kunstbauten nicht gerne zu Trägern von Höhenmarken auswählen und sich überhaupt durch geschickte Wahl der Objecte von solchen Temperaturwirkungen unabhängig machen. Die Nordseite bewohnter Häuser, deren Mauern sich auch im Winter nicht ganz abkühlen, dürfte sich dazu empfehlen. — Fast unbemerkt bleibt die Hebung oder Senkung der Höhenmarken durch die Ausdehnung des Erdbodens in Folge des täglichen und jährlichen Wechsels der Bodenwärme, weil dieser Wechsel weiten Länderstrecken gemeinsam ist, also fortwährend die gleichen Höhenunterschiede bewahrt. Zudem nimmt die GröÙe der Temperaturschwankungen mit der Tiefe rasch ab, also auch der Unterschied der größten und geringsten Bodenausdehnung. Schon in einer Tiefe von 8^{m} zeigen sich in unseren Breiten die Jahreszeiten vertauscht, d. h. die

größte Abkühlung, wenn in den obersten Schichten die größte Erwärmung eintritt; es compensirt sich also ein Theil der Temperatureinflüsse. In den Tropenländern hört bei 0,5^m Tiefe jede Temperaturschwankung auf. — Dagegen ist es sehr wichtig, als Träger von Fixpunkten nur solche Objecte zu wählen, welche unter der Frostlinie, also bei uns mindestens 1^m tief, fundirt sind, weil sonst beim Gefrieren der Bodenfeuchtigkeit Lagenänderungen unvermeidlich und nach ihrem Sinn und Betrage durchaus unberechenbar sind. Grenzsteine und dgl. können nur zu Fixpunkten untergeordneter Art dienen. Bei Wahl der Orte für WEISBACH'sche Höhenmarken wird man meist von selber darauf geführt, genannten Verhältnissen Rechnung zu tragen.

§. 31. In jedem nivellirten Polygon stoßen wir auf Widersprüche beim Vergleiche der beiden Nivellements, welche 2 Schleifenpunkte verbinden und es ist klar, daß diese Widersprüche durchaus von gleicher Größe sind, auch dann wenn wir zum (beliebig gewählten) Ausgangspunkte zurückkehren und den Höhenunterschied Null mit jenem vergleichen, welchen das Polygonnivellement liefert. Der hier auftretende Widerspruch, der Schlußfehler des Polygons, muß beseitigt, ausgeglichen werden.

Gesetzt wir hätten Mittel gefunden, die wahrscheinlichen Fehler $w_1; w_2 \dots$ aller Höhenunterschiede $h_1; h_2 \dots$ je zweier Höhenmarken kennen zu lernen, aus welchen sich das Nivellement einer Schleife zusammensetzt, die mit dem Fehler $\Delta \pm W$ schließt, wo $W^2 = w_1^2 + w_2^2 + \dots$ gedacht wird; so nehmen bei der Ausgleichung die einzelnen Stücke h an Δ in dem Verhältniß $\delta_1 = w_1^2 \Delta : W^2; \delta_2 = w_2^2 \Delta : W^2; \text{etc.}$ Theil, d. h. die Vertheilung des Schlußfehlers auf die Zwischenpunkte erfolgt den Quadraten der wahrscheinlichen Fehler der h proportional. Zeigt sich, daß die Fehler $w_1; w_2 \dots$ der Wurzel aus der Weglänge proportional ausfielen, welche das Nivellirinstrument von Höhenpunkt zu Höhenpunkt zurücklegte, so erfolgt die Vertheilung des Schlußfehlers diesen Strecken proportional. Die corrigirten Stücke $h_1 + \delta_1; h_1 + h_2 + \delta_1 + \delta_2; h_1 + h_2 + h_3 + \delta_1 + \delta_2 + \delta_3; \text{etc.}$ sind nach der Ausgleichung mit kleineren wahrsch. Fehlern v behaftet, welche sich berechnen aus:

$$v^2 W^2 = w_1^2 (w_2^2 + w_3^2 + \dots); \quad v''^2 W^2 = (w_1^2 + w_2^2) (w_3^2 + w_4^2 + \dots); \\ v'''^2 W^2 = (w_1^2 + w_2^2 + w_3^2) (w_4^2 + w_5^2 + \dots) \text{ etc.} \quad (81)$$

Man kann sich die Fehlerquadrate $v^2; v''^2; v'''^2 \dots$ als Ordinaten einer gemeinen Parabel denken, deren Abscissenachse im Parameter (W^2) liegt, sodas der Maximalwerth $v_m^2 = 1/4 W^2$ sich dort ergibt, wo vom Anfangs- und Schlufspunkt s aus gezählt die Werthe $w_1^2 + w_2^2 + \dots + w_m^2$ und $w_n^2 + w_o^2 + \dots + w_s^2$ gleichen Betrag erreichen. Die wahrscheinl. Fehler der ausgeglichenen Unterabtheilungen werden also abhängig von der Annahme über die Lage des Schlufspunktes s und wechseln mit dieser Annahme. — Aehnlich würden die Correctionen δ vertheilt und die wahrscheinl. Fehler v berechnet für ein Nivellement,

welches nicht zu seinem Ausgangspunkt zurückkehrte, sondern zwischen zwei andere Punkte a und s eingeschaltet wäre, deren Coten bereits festliegen und nicht mehr geändert werden sollen; z. B. wenn von einem Ufer eines Binnensee's zum andern nivellirt und dem Seespiegel mehr Vertrauen geschenkt wird als dem Nivellement, der Angabe des ersteren also ein wahrscheinlicher Fehler $w = 0$ zugeschrieben wird.

Treffen mehr als 2 Nivellements, einerlei ob auf demselben oder verschiedenen Wegen ausgeführt, in zwei Knotenpunkten a und b zusammen, ohne sich auch in Zwischenpunkten zu berühren, so bilden sich Nachbarschleifen, und die Widersprüche, welche die einzelnen Höhenunterschiede von a und b , nämlich $H_1 \pm W_1; H_2 \pm W_2; \text{etc.}$ unter sich darbieten, werden ausgeglichen, indem man die mittlere Höhe H_m bildet nach:

$$H_m = \left\{ \left[\frac{H}{W^2} \right] : \left[\frac{1}{W^2} \right] \right\} \pm \left\{ 1 : \sqrt{\left[\frac{1}{W^2} \right]} \right\} \text{ oder } \pm \Omega \quad (82)$$

worin die eckigen Klammern die von GAUSS eingeführte Bedeutung haben. Die Differenzen $H_m - H_1 = \Delta_1; H_m - H_2 = \Delta_2; \text{etc.}$ werden wie oben dem Quadrate der wahrscheinlichen Fehler proportional auf die Zwischenpunkte vertheilt, z. B. Δ , in die Stücke $\delta_1 = w_1^2 \Delta : W_1^2; \delta_2 = w_2^2 \Delta : W_2^2; \text{etc.}$ zerlegt. Werden die wahrscheinlichen Fehler $\Omega_1; \Omega_2; \text{etc.}$ nach folgenden Gleichungen gebildet:

$$\Omega_1^2 \left(\frac{1}{W_2^2} + \frac{1}{W_3^2} + \dots \right) = \Omega_2^2 \left(\frac{1}{W_1^2} + \frac{1}{W_3^2} + \dots \right) = \text{etc.} = 1 \quad (83)$$

so berechnen sich die wahrscheinlichen Fehler v der Zwischenstücke, von irgend einem Hauptpunkte, z. B. a aus und für H , genommen, ähnlich wie oben (81) nach:

$$v^2 (W_1^2 + \Omega_1^2) = w_1^2 (w_2^2 + w_3^2 + \dots + \Omega_2^2);$$

$$v^2 (W_1^2 + \Omega_1^2) = (w_1^2 + w_2^2) (w_3^2 + \dots + \Omega_2^2);$$

und das letzte v_b nach: $v_b^2 (W_1^2 + \Omega_1^2) = W_1^2 \Omega_1^2$ und daraus, wie es sein muß, $v_b = \Omega$, weil $W_1^2 \Omega_1^2 = \Omega (W_1^2 + \Omega_1^2)$ ist. Ebenso für Zwischenstücke von H_2 wird $v^2 (W_2^2 + \Omega_2^2) = w_1^2 (w_2^2 + w_3^2) + \dots + \Omega_2^2$ etc., wobei natürlich die Größen v und w innerhalb H , andere Zahlen bezeichnen als innerhalb H_2 .

Die Ausgleichung einzelner oder benachbarter Polygone, welche nur zwei Knotenpunkte a und b mit einem Höhennetze gemein haben, sonst aber außer Verbindung damit stehen, kann der Ausgleichung größerer Netze allemal vorangehen, um die directen Höhenmessungen zwischen beiden Punkten zu vereinigen. Die Netzausgleichung wird zwar das resultirende Höhenmaß und dessen Gewicht unter Rücksicht auf indirecte Messungen abändern, aber jene Vorarbeit vermindert, wie wir gleich sehen werden, die Anzahl der Endgleichungen, indem sie alle Knotenpunkte zweiter Ordnung eliminirt. Läßt man außerdem die Knotenpunkte erster Ordnung einfach weg, so hat man es nur noch

mit Höhenunterschieden von Knotenpunkten dritten und höheren Ranges zu thun, was die Rechnung zuweilen erleichtert.

Sind die Marken b ; c und d einer Schleife aus der neben angedeuteten Gruppe von Höhenpunkten unter sich und mit einer vierten, beispielsweise in ihrer Mitte gelegenen, Marke a durch Nivellement direct verbunden, so entsteht ein Netz von 4 Knotenpunkten dritten Rangs, und die Widersprüche, welche sich in den 4 entstandenen Schleifen (zwischen je 3 Knotenpunkten) kundgeben, verlangen Ausgleichung. Wählt man irgend einen Netzpunkt, z. B. a als Ausgangspunkt und betrachtet die Höhenlage der Punkte b ; c ; d über a als Unbekannte x ; y ; z , so bekommt man auf einfache Weise soviel Fehlergleichungen, als directe Nivellementverbindungen hergestellt wurden, hier also im geringsten Falle 6, nämlich, wenn die Reste ϱ jene Widersprüche zwischen Beobachtungs- und ausgeglichenen Größen darstellen:

$$\left. \begin{aligned} \varrho_1 &= ab - x \\ \varrho_2 &= ac - y \\ \varrho_3 &= ad - z \\ \varrho_4 &= bc + x - y \\ \varrho_5 &= cd + y - z \\ \varrho_6 &= bd + x - z \end{aligned} \right\} (84)$$

Wäre der Höhenunterschied zweier Punkte, z. B. b und d , doppelt bestimmt worden, hätte man dafür außer bd noch b,d , gefunden, gleichviel ob auf Einem oder verschiedenen Wegen, so träte zu den vorigen Gleichungen noch die siebente:

$$\varrho_7 = b,d + x - z$$

u. f. w., wenn man nicht vorzieht, Doppelnivellements von vorn herein zu vereinigen. Um alle diese Fehlergleichungen auf die Gewichtseinheit zu reduciren, dividirt man sie, wenn die wahrscheinlichen Fehler ω der einzelnen Nivellements bekannt sind, der Reihe nach mit ω_1 ; $\omega_2 \dots$ und erhält sodann nach der Meth. d. kl. Quadrate so viele Endgleichungen, als Knotenpunkte im Netz, den Ausgangspunkt (a) ausgenommen. In unfrem Beispiele lauten dieselben, wenn man allgemein $p = 1 : \omega^2$ setzt und die Höhenmaße ab ; $ac \dots$ mit a_1 ; $a_2 \dots$ bezeichnet, wie folgt:

$$\begin{aligned} 0 &= -(p_1 a_1 - p_4 a_4 - p_6 a_6 - p_7 a_7) + (p_1 + p_4 + p_6 + p_7) x - p_4 y \\ &\quad - (p_6 + p_7) z \\ 0 &= -(p_2 a_2 + p_4 a_4 + p_5 a_5) - p_4 x + (p_2 + p_4 + p_5) y - p_5 z \\ 0 &= -(p_3 a_3 + p_5 a_5 + p_6 a_6 + p_7 a_7) - (p_6 + p_7) x - p_5 y + (p_3 + p_5 + \\ &\quad + p_6 + p_7) z \end{aligned}$$

Löst man sie auf, so finden sich die Größen x ; y ; z und auf bekannte Weise auch deren Gewichte und wahrscheinliche Fehler. Um letztere aus den übrigbleibenden Fehlern recht scharf zu bestimmen, empfiehlt sich die Bildung sämtlicher möglichen Fehlergleichungen, auch wenn wir bei der Ausgleichung selbst ihrer etliche zusammenfaßten. Wäre etwa zwischen a und b noch ein Knotenpunkt 2^r Ordnung e gelegen, mit a einfach, mit b doppelt verbunden und bedeuten

$\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3$ die entsprechenden Höhenunterschiede, $\pi_1; \pi_2; \pi_3$ die reciproken Werthe der wahrsch. Fehlerquadrate, ξ den ausgeglichenen Höhenunterschied ae , so treten an die Stelle der ersten Fehlergleichung in (84) folgende drei mit ihren Gewichten π :

$$e' = \alpha_1 - \xi; \quad e'' = \alpha_2 - \xi - x; \quad e''' = \alpha_3 - \xi - x; \quad (85)$$

und es wird noch eine vierte Endgleichung aus der partiellen Differentiation nach ξ entstehen, in welcher jedoch die Coefficienten von y und z gleich Null werden, während aus zweien der übrigen wieder ξ verschwindet. Bei geschickter Behandlung geht aber aus der Auflösung dieser 4 Gleichungen keine wesentliche Mehrarbeit gegenüber jener von nur 3 Gleichungen hervor und es ist darum in einem Falle wie der vorliegende mit der oben erwähnten vorläufigen Vereinigung der Werthe α zur Grösse ab nicht viel gewonnen. Mag man sie nun vornehmen oder unterlassen, immer werden uns die Gleichungen (85) die übrig bleibenden Fehler zu liefern haben und im ersteren Falle auch, nach Berechnung von x , den wahrscheinlichsten Werth des ξ geben.

Nach der Netzausgleichung werden die übrigbleibenden Differenzen proportional dem Quadrate der wahrscheinlichen Einzelfehler auf die Zwischenpunkte vertheilt und die Höhenlage von Knotenpunkten erster Ordnung auf einfache Weise berechnet. Die strenge Berechnung der wahrsch. Fehler von Zwischenpunkten nach der Ausgleichung wird aber schon sehr umständlich, weshalb man sich mit einer Annäherung begnügen wird, welche aus folgendem Beispiele erhellt: Seien im Nivellement von b nach c einige Zwischenmarken gelegen und Ψ_4 der für $bc = y - x$ gefundene wahrscheinliche Fehler, während $w_1; w_2 \dots$ die wahrscheinlichen Einzelfehler der Stücke sind, aus welchen sich bc ursprünglich zusammensetzte, so sind für die corrigirten Stücke die wahrsch. Fehler v zu rechnen aus:

$$v^2 \omega_4^2 = w_1^2 (w_2^2 + w_3^2 + \dots + \Psi_4^2);$$

$$v''^2 \omega_4^2 = (w_1^2 + w_2^2) (w_3^2 + w_4^2 + \dots + \Psi_4^2);$$

und der letzte aus: $v_c^2 \omega_4^2 = \omega_4^2 \Psi_4^2$ wie es sein muß. Ausser dem letzten v werden alle übrigen jedoch ein wenig zu groß.

§. 32. Im Vorigen wird Kenntniss der wahrscheinlichen Nivellirfehler vorausgesetzt, also ein Verfahren bei der Aufnahme, welches nach bayerischer Art oder der von BOERSCH die Fehler eines jeden Standes ermittelt, jedoch mit Rücksicht auf sämmtliche Fehlerquellen. Letztere Bedingung blieb, wie das *II. Capitel* zur Genüge ausführt, bis jetzt unerfüllt, meistens beschränkt man sich also darauf, das Verhältniss der wahrsch. Fehler oder der Gewichte in den verschiedenen Polygonseiten festzusetzen, die wahrsch. Fehler selbst aber nach der Ausgleichung aus den übrigbleibenden abzuleiten. Bei gleichen Zielweiten und gleich günstigen äusseren Umständen liegt die Annahme nahe, daß der Nivellirfehler mit der Wurzel aus der Anzahl der

Stände oder mit der Wurzel aus der Entfernung wachse, die Gewichte also den Entfernungen umgekehrt proportional seien. Dieselbe Voraussetzung wäre auch bei der in §. 20 erläuterten Fehlerbeschränkung gerechtfertigt, also bei sehr ungleichen Zielweiten und äusseren Verhältnissen, wenn gut getheilte metallene Zielscalen statt schlecht bemalter hölzerner zur Verwendung kommen und kurze Zielweiten den ungleichen Einfluss der Refraction abschwächen. — Unter der weiteren Voraussetzung, dass der Fehler im einzelnen Stand proportional der Zielweite wachse, bemerkt HELMERT (*Ausgleichungsrechnung* pag. 308), dass sich die Gewichte der Nivellements umgekehrt wie die Produkte aus der Nivellementslänge L und der angewandten Zielweite $L : 2n$ verhalten. Denn das Quadrat des wahrsch. Fehlers, welches wir ω^2 nannten und das den Gewichten umgekehrt proportional ist, setzt sich zusammen aus der Anzahl n der (gleich gross gedachten) Stände, multiplicirt mit dem doppelten Quadrat des wahrsch. Zielfehlers. Ist dieser für die Längeneinheit $\sqrt{k}$, wo k eine Constante vorstellt, so wird er der Voraussetzung nach für die Zielweite z gleich $z\sqrt{k}$ und $\omega^2 = 2nkz^2$. Da aber $2nz = L$; so wird $\omega^2 = kLz$. — Wir haben jedoch in (32) ein anderes Wachsthum des wahrscheinlichen Zielfehlers mit der Stationslänge gefunden und kommen durch die gleiche Schlussfolge bei dessen Einführung auf

$$\omega^2 = 2nz^5 : \lambda = Lz^4 : \lambda \quad (86)$$

worin $\sqrt{\lambda} = 3533$ gesetzt ist. Diese Gleichung sagt, dass für den bayerischen Apparat und für wechselnde Gunst des Wetters das Gewicht eines Schleifenstückes umgekehrt proportional dem Product aus dessen Länge in die vierte Potenz der angewandten Zielweite zu nehmen ist, wenn wir diese in dem ganzen Stücke gleich gross wählen. Da (86) für andere Apparate wohl dieselbe Form annehmen und die Constante λ kaum grösser ausfallen wird, so richtet sich damit das starre Festhalten an vorgewählten Zielweiten, wie es noch immer hie und da beliebt wird. Soll gleichwohl die Fehlergrenze $\sqrt{L^{\text{dmm}}}$ nicht überschritten werden, L in Metern gedacht, so darf nach pag. 79 der wahrscheinliche Fehler ω nicht $\sqrt{L} : \sqrt{V}$ überschreiten. Daraus folgt für vorbestimmte Zielweiten z die Bedingung: $Lz^4 < \lambda L : 2,611^2$ somit

$$z < \sqrt{\frac{3533}{2,611}} \text{ oder } z < 36,8^{\text{m}}$$

Vorstehende Bestimmungen der Verhältnisszahlen für die Gewichte lassen jedoch die Fehler wegen Scalenlänge und Scalentheilung ausser Acht und sind darum ungenügend. HIRSCH und PLANTAMOUR, welche zuerst auf den Einfluss dieser Fehler, eigentlich nur des ersten von beiden, hinwiesen, haben auch bei der Ausgleichung des Schweizer Nivellements darauf Rücksicht genommen. Sie nehmen an, dass der Fehler der Polygonseiten zum einen Theil proportional der Wurzel aus der Entfernung, zum andern der Summe aller durchgemessenen

Höhenunterschiede, absolut genommen, wachse. Da man aber den wahrscheinlichen Betrag beider Theile nicht kennt, so ist eine vorläufige Bestimmung der Gewichtsverhältnisse für die Schleifenstücke nicht ausführbar; man muß sich zunächst mit bloßer Schätzung behelfen und durch wiederholte Ausgleichung des Netzes auf Grund solcher Schätzung Kenntniß der wirklichen Gewichte zu gewinnen suchen. Es sei jedoch bemerkt, daß nach dem Vorigen der erste Theil des Schleifenfehlers nicht der Wurzel aus der Entfernung, sondern etwas strenger dem Product aus dieser Wurzel in das Quadrat der mittleren Zielweite proportional gesetzt werden müßte, da in der Schweiz, der verschiedenen Steigungen wegen, ziemlich ungleiche (im Durchschnitt aber nur kleine) Zielweiten verwandt werden. Eine Fehlerbeschränkung nach Art der in §. 20 erwähnten findet dabei nicht Statt.

Das *Niv. de préc. II*, §. XI, pag. 108, setzt den Vorgang der indirecten Ausgleichungsrechnung auseinander. Wir wollen hier einen Weg einschlagen, der sich dem gewöhnlichen Ausgleichungsverfahren und dem vorigen Paragraphen etwas enger anschließt. Die dort bekannte GröÙe ω ist jetzt eine Function von zwei Unbekannten geworden und von der Form:

$$\omega^2 = (\xi \sqrt{L})^2 + (\zeta A)^2 \quad (87)$$

worin L die Länge einer Polygonseite, A die absolute Summe aller darin durchlaufenen Höhen bedeutet, also an der Vorstellung, daß ein Theil des Fehlers sich mit der Wurzel aus der Entfernung anhäufe, und den damit verknüpften früher erwähnten Bedingungen festgehalten wird. Für das bayerische Nivellement kennen wir aus (46) schon $\xi = 0,4691 \sqrt{9 : 10^4} \sqrt{m}$; während wir in (47) einen Ausdruck für den Coefficienten ζ schätzungsweise aufstellten und fanden, daß ζ zwischen $\Psi_0 = 0,71 : 10^4$ und $\Psi_1 = 1,233 : 10^4$ gelegen sein werde. Wäre das bayer. Nivellement, statt mit geregelt variabler, mit beliebig gewählten Zielweiten ausgeführt worden, so müßten wir mit Rücksicht auf (86) für (87) eine andere Form wählen, nämlich:

$$\omega^2 = \frac{z^4}{\lambda} L + \zeta^2 A^2$$

worin wir die mittlere Zielweite z für jede Polygonseite immer aus den Aufnahmsheften kennen und auch λ schon für Bayern bestimmt haben, während es für andere Nivellements ganz wie ζ als Unbekannte zu betrachten wäre.

Wir bleiben bei der Annahme (87), welche z. B. für das bayer. Nivellement von 1870/71 strenge gilt und fassen ξ und ζ als noch nicht endgültig bestimmt auf. Durch Division mit dem wahrscheinlichen Fehler ω bekommt die allgemeine Fehlergleichung:

$$e = a + \gamma x + \delta y + \varepsilon z \quad (88)$$

in welcher a den nivellirten Höhenunterschied, γ ; δ ; ε Coefficienten von dem Werthe $+1$; -1 ; oder 0 bezeichnen, folgende Gestalt:

$$\sigma = (L\xi^2 + A^2\zeta^2)^{-1/2} (\alpha + \gamma x + \delta y + \varepsilon z) \quad (89)$$

Sie unterscheidet sich von der früheren wesentlich dadurch, daß sie zwei Unbekannte mehr enthält und die Form einer Gleichung vom 1. Grade verloren hat. Sobald ξ und ζ gegeben, gewinnt sie dieselbe wieder und dann erst ist das Auffuchen der Größen $x; y; z$ ausführbar, während umgekehrt die wahrscheinlichsten Werthe von ξ und ζ erst gefunden werden können, wenn $x; y; z$ ihrem wahren Betrage nach bekannt sind. In diesem Falle nämlich lassen sich nach (88) die Größen ϱ rückwärts berechnen; es sind die Unterschiede der nivellirten und wahren Höhenmaße. Die ϱ sind aber zugleich Functionswerthe von L und A und haben sich alle nach der gleichen Regel angehäuft, nämlich nach

$$\varrho^2 = (\xi^2 L + \zeta^2 A^2) x^2 \quad (90)$$

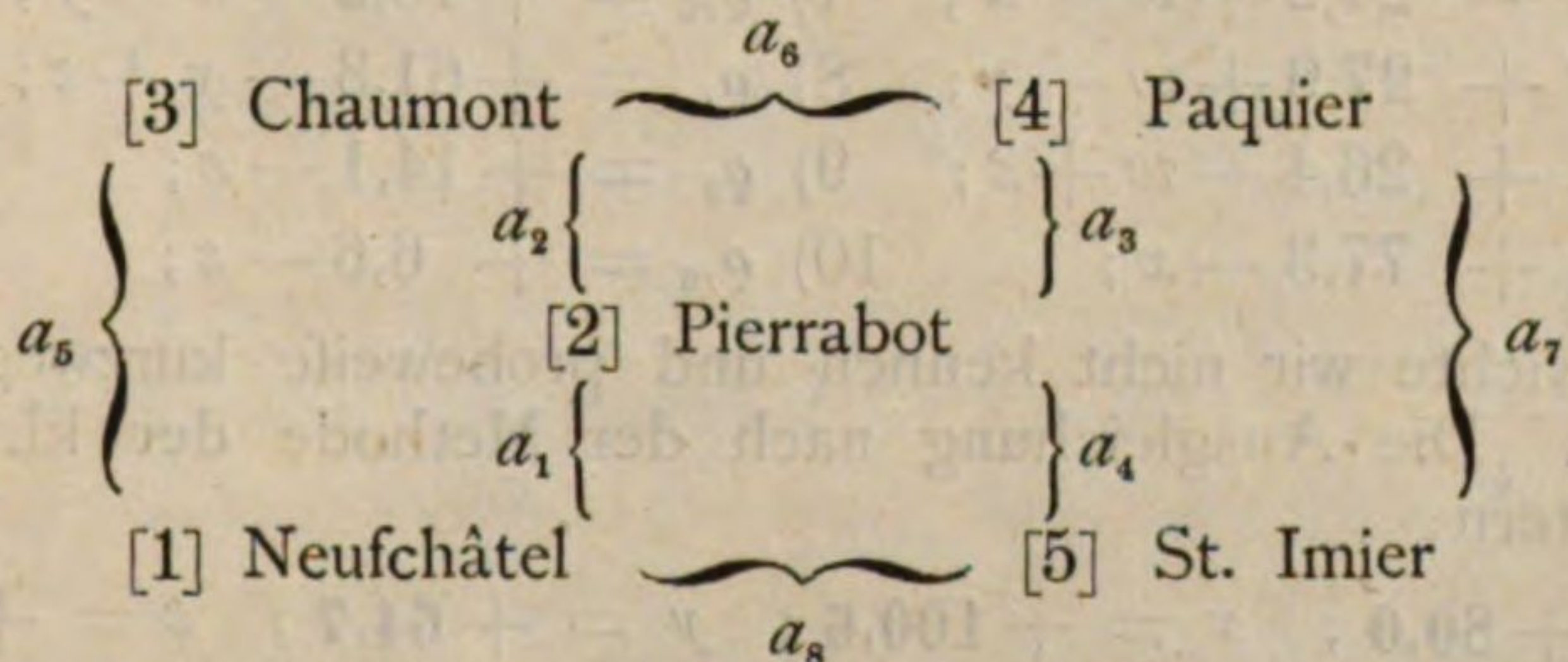
wenn x das Verhältniß des mittleren zum wahrscheinlichen Fehler bezeichnet. Die Differenzen ϱ sind also den Coefficienten ξ und ζ gegenüber Beobachtungswerthe und gestatten die Berechnung der wahrscheinlichsten Größen letzterer. Kennten wir schon die wahren $x; y; z$; so würde die Berechnung der ϱ und die Anwendung der Methode der kl. Qu. zur Bestimmung von ξ und ζ nicht die geringsten Schwierigkeiten bieten, denn die allgemeine Formel (90) hat in Bezug auf ξ^2 und ζ^2 schon lineare Gestalt und alle danach gebildeten Gleichungen müssen wir von gleichem Gewicht voraussetzen. Der Umstand aber, daß wir für $x; y; z$ nur Näherungswerthe finden können, zwingt uns die Rechnung mehrmals zu wiederholen.

Behandeln wir im Anfang die Gleichungen (89) unter Annahme genäherter ξ und ζ oder unter der Voraussetzung, entweder daß die Fehler im Nivellement der Polygonseiten dem gefundenen Höhenunterschied, oder daß sie der Wurzel ihrer Länge proportional seien; so gibt uns die Meth. d. kl. Qu. Näherungsgrößen von $x; y; z$ also auch von ϱ , welche wir in die Gleichungen nach (90) einführen, um ebenso Näherungswerthe von ξ und ζ zu erhalten. Diese wieder in den ersten Factor von (89) eingesetzt, geben uns neue Fehlergleichungen zur Berechnung von $x; y; z$ sowie von ϱ , somit auch ebensoviele neue Gleichungen (90), um in zweiter Annäherung ξ und ζ zu gewinnen etc., bis zuletzt die Differenzen ϱ durch Neuberechnung nicht mehr verändert werden.

Ohne Frage wird auf solche Weise sowohl das Gewicht der ausgeglichenen Höhen $x; y \dots$ als auch das der Constanten ξ und ζ weit kleiner, als wenn letztere direct ermittelt werden, wie es, wenigstens mit einer derselben (ξ) in Bayern geschehen ist. Der Betrag von ζ ist auch hier nur näherungsweise bekannt und wäre das bayr. Höhennetz in zusammenhängende Polygone gruppirt, so müßten bei seiner Ausgleichung im Ganzen ebensoviele Unbekannte berechnet werden, als Knotenpunkte vorhanden; in anderen Nivellements, wo weder ξ noch ζ bekannt sind, noch eine mehr. Dagegen wird das ganze Annäherungsverfahren überflüssig und die Rückkehr zum directen des

vorigen Paragraphen möglich, wenn ζ nahe auf Null gebracht wurde, sodafs ζA gegen $\xi \sqrt{L}$ verschwindet, wozu *Cap. II* die Mittel andeutet. — Nicht so bei Vereinigung zweier oder mehrerer Nachbarnetze, welche nach verschiedenen Methoden und mit anders gearteten Instrumenten ausgeführt sind. Nach vorgängiger Abschätzung der Gewichte und einer ersten Ausgleichung müssen die übrigbleibenden Fehler jedes Netzes wieder getrennt behandelt, in den meisten Fällen wohl auch nach verschieden geformten Gleichungen interpolirt werden, um die Gewichte zu präcisiren. Dann folgt abwechselnd auf eine gemeinsame Ausgleichung der unbekannten Höhen der Knotenpunkte mit neuen Gewichten, wieder die getrennte Interpolation der übrigbleibenden Fehler etc., bis letztere constant werden. Weil hier die Constanten ξ für jedes Netz verschieden ausfallen, kann auch, wenn $\zeta = 0$, von einer Rückkehr zum directen Verfahren keine Rede sein.

Ein leichtes Zahlenbeispiel entnehmen wir in nachfolgender Schleifen-
gruppe dem *Niv. de préc. II*, § *XI*, nicht ohne einige willkürliche
Kürzungen, welche im Ernstfalle unzulässig wären. So ist die Seite a_6
aus einem wiederholten Nivellement der Seiten a_1 und a_2 gebildet



und sollte eigentlich 2 statt wie hier nur eine Fehlergleichung liefern. Innerhalb a_6 liegt ein Knotenpunkt zweiter Ordnung Chufford, welcher mit Paquier doppelt, mit Chaumont nur einfach verbunden ist. Die 3 Beobachtungswerthe sind hier in 2 zusammengezogen und damit eine Fehler- und eine Endgleichung weggefallen, aber auch der Seite Chufford-Chaumont doppeltes Gewicht verliehen. Aehnliches erlaubten wir uns mit a_8 , welches eigentlich noch 2 Knotenpunkte zweiten Ranges enthält, die unter sich und mit [1] oder [2] durch doppeltes Nivellement verbunden sind; und dgl. mehr.

In den folgenden Angaben der Beobachtungswerthe bedeutet das Symbol [2,1] die Cotendifferenz der Punkte [2] und [1], die Cote des links stehenden Punktes als Minuend gedacht. L und A haben die in (90) gegebene Bedeutung und sind in Kilometern und in Einheiten von 100 Metern ausgedrückt.

[2,1] = a_1 = + 189,4035 ^m	L_1 = 3,1	A_1 = 1,89
[3,2] = a_2 = + 547,5757	L_2 = 6,2	A_2 = 5,48
[4,2] = a_3 = + 273,5279	L_3 = 16,1	A_3 = 3,48

$[2,5] = a_4 = -187,2736^m$	$L_4 = 35,1$	$A_4 = 14,73$
$[3,1] = a_5 = +736,9773$	$L_5 = 9,3$	$A_5 = 7,37$
$[4,3] = a_6 = -274,0428$	$L_6 = 12,1$	$A_6 = 5,07$
$[4,3], = a_{,6} = -274,0818$		
$[4,5] = a_7 = +86,2613$	$L_7 = 9,3$	$A_7 = 5,57$
$[5,1] = a_8 = +376,6141$		
$[5,1], = a_{,8} = +376,6066$	$L_8 = 59,7$	$A_8 = 4,24$

Seien die Höhen der Punkte [2, 3, 4, 5] über Neufchâtel [1] der Reihe nach in Millimetern:

- [2] Pierrabot: $189300 + w$;
- [3] Chaumont: $736900 + x$;
- [4] Paquier: $462800 + y$;
- [5] St. Imier: $376600 + z$;

so erhalten wir für diese 4 Unbekannten 10 Fehlergleichungen:

$$\left. \begin{array}{ll} 1) \varrho_1 = +103,5 - w; & 6) \varrho_6 = +57,2 + x - y; \\ 2) \varrho_2 = -24,2 + w - x; & 7) \varrho_{,6} = +18,2 + x - y; \\ 3) \varrho_3 = +27,9 + w - y; & 8) \varrho_7 = +61,3 - y + z; \\ 4) \varrho_4 = +26,4 - w + z; & 9) \varrho_8 = +14,1 - z; \\ 5) \varrho_5 = +77,3 - x; & 10) \varrho_{,8} = +6,6 - z; \end{array} \right\} (91)$$

deren Gewichte wir nicht kennen und probeweise kurzweg als gleich annehmen. Die Ausgleichung nach der Methode der kl. Qu. ergibt in Millimetern:

$$w = +80,0; \quad x = +100,6; \quad y = +64,7; \quad z = +28,4 \quad (I)$$

und die Rückwärtsberechnung der Fehler ϱ folgende nach (87) gebildete 10 Gleichungen zur Bestimmung von ξ und ζ :

$$\begin{array}{ll} 1) 552,25 = 6,957 \xi^2 + 8,04 \zeta^2; & 6) 8667,61 = 27,225 \xi^2 + 57,84 \zeta^2 \\ 1) 2016,01 = 13,95 \xi^2 + 67,57 \zeta^2; & 7) 2926,81 = 27,225 \xi^2 + 57,84 \zeta^2 \\ 3) 1102,24 = 36,225 \xi^2 + 27,25 \zeta^2; & 8) 625,00 = 20,925 \xi^2 + 69,81 \zeta^2 \\ 4) 635,04 = 78,975 \xi^2 + 486,21 \zeta^2; & 9) 204,49 = 134,325 \xi^2 + 40,45 \zeta^2 \\ 5) 542,89 = 20,925 \xi^2 + 122,21 \zeta^2; & 10) 475,24 = 134,325 \xi^2 + 40,45 \zeta^2 \end{array}$$

Aus diesen Gleichungen, deren Zahlen jedoch sämtlich auf Ganze abzurunden und in denen die Coefficienten des ξ^2 und ζ^2 durch alle folgenden Rechnungen beizubehalten sind, bildet sich die allgemeine Formel (90) wie folgt:

$$\varrho^2 = (8,162 L + 3,000 A^2) x^2 \quad (I_{,,})$$

und nach dem Anbringen der Gewichte x^2 : ϱ^2 finden wir aus dem System (91) neuerdings:

$$w = +99,68; \quad x = +76,48; \quad y = +114,56; \quad z = +40,75 \quad (II)$$

während sich aus der Rückwärtsberechnung der Fehler ϱ die neue Gewichtsformel ableiten läßt:

$$\varrho^2 = (6,73 L + 0,94 A^2) x^2 \quad (\text{II,,})$$

Die nächste Wiederholung des Kreislaufes liefert:

$$w = +99,692; \quad x = +76,549; \quad y = +114,775; \quad z = +44,508 \quad (\text{III,})$$

und als Gewichtsformel*):

$$\varrho^2 : x^2 = (5,716 \pm 1,023) L + (0,807 \pm 0,422) A^2 \quad (\text{III,,})$$

Um mit kleineren Zahlen zu operiren, setzen wir zum Schluß:

$$[2,1] = 189399^{\text{mm}} + \delta w \quad [4,1] = 462914^{\text{mm}} + \delta y$$

$$[3,1] = 736976^{\text{mm}} + \delta x \quad [5,1] = 376644^{\text{mm}} + \delta z$$

und runden Gleichung (III,,) zur letzten Gewichtsberechnung auf folgende ab:

$$\varrho^2 = [5,72 L + (0,9 A)^2] x^2$$

die Gewichte selbst aber auf ganze Zahlen. So erhalten wir die Endgleichungen:

$$\left. \begin{aligned} 0 &= -363,2 + 777 \delta w - 167 \delta x - 98 \delta y - 27 \delta z \\ 0 &= +16,5 - 167 \delta w + 492 \delta x - 222 \delta y \quad . \\ 0 &= -83,9 - 98 \delta w - 222 \delta x + 448 \delta y - 128 \delta z \\ 0 &= -1,4 - 27 \delta w \quad . \quad -128 \delta y + 211 \delta z \end{aligned} \right\} \quad (92)$$

denen als wahrscheinlichste Werthe der Unbekannten entspringen:

$$\delta w = +0,7059; \quad \delta x = +0,5586; \quad \delta y = +0,7813; \quad \delta z = +0,5709 \quad (\text{IV,})$$

Da nun in allen 4 Höhenmaßen die Zehntelmillimeter constant geworden sind, so beschließen wir dies Rechnen in der Spirale, von dem auch die hier folgenden Reihen der Fehlerreste, welche nach der III. Ausgleichung selbstverständlich ebenfalls constant bleiben, ein anschauliches Bild gewähren.

*) Wären unfre Zahlen ganz der Wirklichkeit entnommen, so würden sie mit jenen des §. 21 zu vergleichen, zuvor aber auf daselbe Maß wie dort zu reduciren sein. Stellen l und a die Längen in Metern dar, welche von L in Kilometern, von A in Einheiten zu 100^{m} angegeben werden, so findet man für (III,,):

$$5,716 L \square^{\text{mm}} = 571,6 L \square^{\text{dmm}} = 0,5716 l \square^{\text{dmm}}$$

und
$$\sqrt{(0,5716 \pm 0,1023) L \square^{\text{dmm}}} = (0,756 \pm 0,068) \sqrt{l \square^{\text{dmm}}}$$

Ferner zum Vergleich mit den in §. 22 angenommenen Größen:

$$0,807 A^2 \square^{\text{mm}} = 80,7 A^2 \square^{\text{dmm}} = 0,00807 a^2 \square^{\text{dmm}}$$

und
$$\sqrt{(0,00807 \pm 0,00422) a^2 \square^{\text{dmm}}} = (0,090 \pm 0,023) a \square^{\text{dmm}}$$

Die Geringfügigkeit letzterer Zahl stößt natürlich die Schlüsse des genannten Paragraphen nicht um, dazu bedürfte es mehrerer und fester gegründeter Beobachtungswerthe.

I	II	III	I	II	III
$q_1 = +23,5$	$+3,8$	$+3,8$	$q_6 = +93,1$	$+19,1$	$+18,9$
$q_2 = -44,9$	$-1,1$	$-1,1$	$q_{16} = +54,1$	$-19,9$	$-20,1$
$q_3 = +33,2$	$+13,0$	$+12,8$	$q_7 = +25,0$	$-12,5$	$-9,0$
$q_4 = -25,2$	$-32,5$	$-28,8$	$q_8 = -14,3$	$-26,7$	$-30,4$
$q_5 = -23,3$	$+0,8$	$+0,8$	$q_{18} = -21,8$	$-34,1$	$-37,9$

Der Vollständigkeit halber mögen noch die Gewichte p der II., III. und IV. Ausgleichung folgen; die der ersten waren gleich Eins angenommen:

	II	III	IV		II	III	IV
$p_1 =$	278	413	485	$p_6 =$	42	88	103
$p_2 =$	71	143	167	$p_8 =$	57	95	111
$p_3 =$	60	84	98	$p_7 =$	59	109	128
$p_4 =$	11	23	27	$p_8 =$	18	24	28

worin allgemein $p = 10000 x^2 : q^2$ gesetzt wurde.

Werden auf gewöhnliche Weise aus den Fehlerresten nach der IV. Annäherung und aus den Gleichungen (92) die wahrscheinlichen Unsicherheiten der Gröfsen w ; x ; y ; z abgeleitet, so findet man unter Berücksichtigung der vorstehenden Gewichte IV:

$$w \pm 5,1862^{\text{mm}}; x \pm 7,4370^{\text{mm}}; y \pm 8,4448^{\text{mm}}; z \pm 10,1990^{\text{mm}} \quad (93)$$

Um auch den Einfluss der Gewichtsunsicherheit kennen zu lernen, müssen wir überlegen, dass den Beobachtungsgröfsen und ebenso den übrigbleibenden Resten allerdings mittlere Fehlerquadrate zugeschrieben wurden, welche den Gewichten umgekehrt proportional sind. Durch Multiplication mit den Gewichtszahlen wurden sodann diese mittleren Fehlerquadrate alle gleich gemacht oder auf die Fehlereinheit reducirt. Aber gerade durch die Multiplication mit den Wurzeln der Gewichte wurden die reducirten gleichwichtigen Beobachtungsgröfsen noch mit einem neuen Fehler behaftet, welcher zu dem mittleren Fehler tritt: dem wegen Unsicherheit der Gewichtszahlen p selbst. Diese mittlere Unsicherheit findet sich, mit Rücksicht auf (III,,) und die der Gewichtstafel beigefügte Bemerkung, aus

$$p = \frac{10000}{(5,716 \pm 1,535) L + (0,807 \pm 0,633) A^2}$$

wie folgt: Ziehen wir beiderseits die Wurzel, differenzieren nach ξ^2 und ζ^2 und setzen die mittleren Fehler dieser Gröfsen an Stelle der Differenziale, so bekommen wir nach Multiplication mit q :

$$q \Delta V p = \frac{100 q (\mp 1,535 L \mp 0,633 A^2)}{2 (5,716 L + 0,807 A^2)^{3/2}}$$

hieraus endlich durch Quadriren:

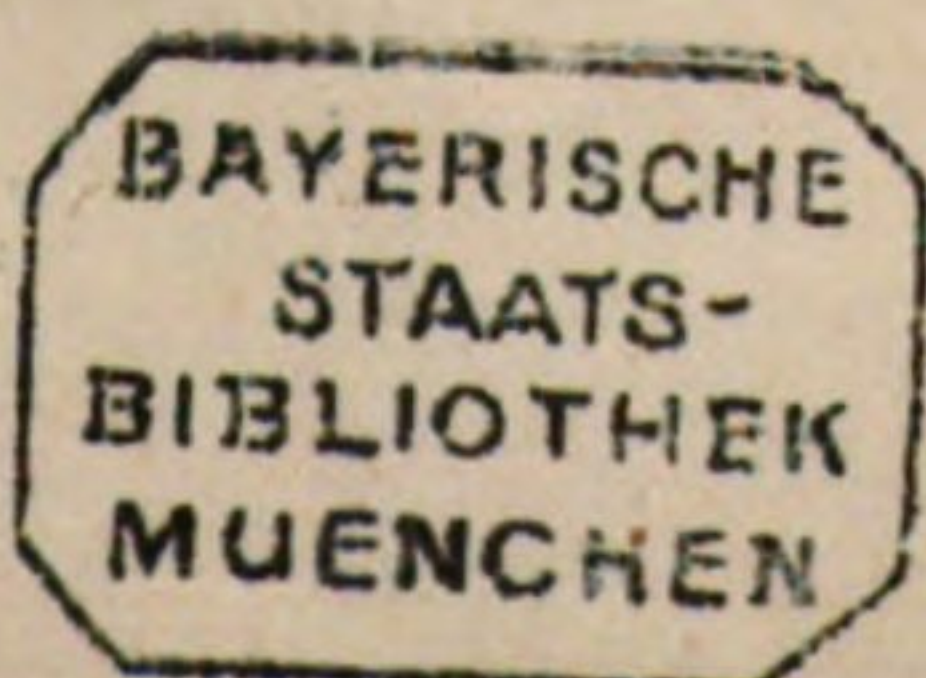
$$e^2 (\Delta V \bar{p})^2 = \frac{1}{4} p e^2 \cdot \frac{2,3564 L^2 + 0,4007 A^4}{(5,716 L + 0,807 A^2)^2} \quad (94)$$

Statt der Gröſſen $p e^2$ ſind demnach die Werthe: $p e^2 + e^2 (\Delta V \bar{p})^2$ oder

$$e^2 (V \bar{p} \pm \Delta V \bar{p})^2 = p e^2 \left(1 + \frac{2,3564 L^2 + 0,4007 A^4}{4 (5,716 L + 0,807 A^2)^2} \right) \quad (95)$$

zu bilden und indem man ihre Summe durch ihre Anzahl, vermindert um die Zahl der Unbekannten $x; y \dots$, dividirt, zum mittleren Fehlerquadrat der Gewichtseinheit zu vereinigen. Diefes erhöht ſich dadurch gegen früher im Verhältniſſe $35209,2 : 34508,8$ und der mittlere Fehler ſowie alle davon abhängigen wahrſcheinlichen Fehler (93) im Verhältniſſe $\sqrt{35209,2} : \sqrt{34508,8} = 1,0101$; demnach um etwa 10/0. Damit aber iſt der Einfluß der Gewichtsunſicherheit auf die wahrſcheinlichen Fehler noch nicht erſchöpft. Es bedürfte dazu der Unterſuchung, bis zu welchem Betrag eine Aenderung der Gewichtsformel (III,,) um ihre wahrſcheinlichen Fehlergröſſen einwirkt auf Verminderung der Gewichtszahlen der $w; x; y; z$ und auf Vergrößerung der Quadratſumme der übrigen Fehler, welche aus den Endgleichungen (92) hervorgingen. Dieſe Unterſuchung unterlaſſen wir jedoch hier, da ſie ſich an einem theilweiſe fingirten Beiſpiele wie das vorliegende kaum verlohnt. Detailarbeiten, wie dieſe Schrift, thun wohl ſich auf das Nothwendige zu beſchränken, wie denn auch das, was ſie Neues bringen, meiſt nur darum neu iſt, weil es den wiſſenſchaftlichen Zielen und den gebotenen Hülſsmitteln gegenüber vorher unbeachtet bleiben mochte, bei eingetretenem Bedarf aber von Kundigen leicht entwickelt wird und gemeiniglich von Mehreren zugleich.

Den Beweis hiefür liefert unter Anderem ein Auffatz von ZACHARIAE zu Copenhagen (*Beiträge zur Theorie des Schluſsfehlers geom. Niv.-Polygone*), welcher in Bd. 80. p. 305 u. ff. des Jahrganges 1872 von *Schumachers Aſtr. Nachrichten* erſchien und den Stoff des I. Cap. vorliegender Schrift größtentheils ſchon bearbeitet, mit Unterſchieden natürlich, wie der, daß ZACHARIAE bei Berechnung der Convergenz ſphäroidiſcher Niveaux die Abplattung für alle Höhen gleich groß annimmt, während er ſich, um den Einfluß geſtörter Niveaux zu beſtimmen, mit der Wahl ſeines hypothetiſchen Beiſpieles etwas mehr der Wirklichkeit nähert als §. 7 dieſer Schrift. Hier wie dort fehlt aber noch eine Anleitung, bei gegebener Gebirgsform und vorgeſchriebenem Weg eines Nivellements die Reduktion auf den wahren Meeresſpiegel wegen durchſchrittener Hochniveaux von abweichender Geſtalt einfach und doch hinreichend genau zu berechnen. Hoffentlich wird auch dieſes ſchwierige, aber nicht ausſichtsloſe Problem in Kurzem gelöst, damit die Ausgleichung von Gebirgnivellements feſtere Grundlagen finde.



Nachtrag zu §. 10.

Der Schlusssatz (*pag.* 29) kann sich nur auf Nivellements in Parallelkreisen beziehen, während für jede andere Azimuthalrichtung die Niveauförungen durch Sonne und Mond, vor und nach der Culmination, wenigstens theilweise in gleichem Sinne einwirken, sodafs zu ihrer Tilgung den Coten von Punkten, welche gegen Mittag liegen, eine erhöhende Correction c beigelegt werden müfste. Sei β die geogr. Breite eines Ortes der Erde, an welchem ein Nivellement in der Azimuthalrichtung α ausgeführt werde, δ die Declination und σ der Stundenwinkel des Mondes, so rechnet sich dessen Zenithdistanz φ aus:

$$\cos \varphi = \sin \beta \sin \delta + \cos \beta \cos \delta \cos \sigma$$

und sein Azimuth A aus

$$\cot A \sin \sigma = \cos \sigma \sin \beta - \cos \beta \operatorname{tg} \delta$$

Drückt man, wie *pag.* 28 geschehen, λ durch φ ($= \psi$) aus, den Ablenkungswinkel A des Loths in der Nivellirrichtung durch λ , A und α unter Rücksicht auf deren Vorzeichen, so ergibt sich:

$$\operatorname{tg} A = \operatorname{tg} \lambda \cos (A - \alpha) = \frac{\sin 2\varphi}{60} \frac{\gamma_0}{g} \cos (A - \alpha);$$

Der Weg x , welchen das Nivellement zurücklegt, kann als eine Function des Stundenwinkels betrachtet werden von der einfachen Form $x = \tau \varrho \sigma$, woraus das Differential der Niveauerhebung folgt:

$$dc = \operatorname{tg} A dx = \tau \varrho \operatorname{tg} A d\sigma$$

Nehmen wir wieder einen speciellen Fall vor, wo $\alpha = 0$ und $\delta = 0$; so ist für ein Nivellement im Meridian:

$$\cos \varphi = \cos \beta \cos \sigma;$$

$$\operatorname{tg} A = \operatorname{tg} \sigma : \sin \beta$$

$$\sin \varphi \cos \varphi = \cos \beta \cos \sigma \sqrt{1 - \cos^2 \beta \cos^2 \sigma}; \quad \cos A = \sin \beta : \sqrt{\sin^2 \beta + \operatorname{tg}^2 \sigma};$$

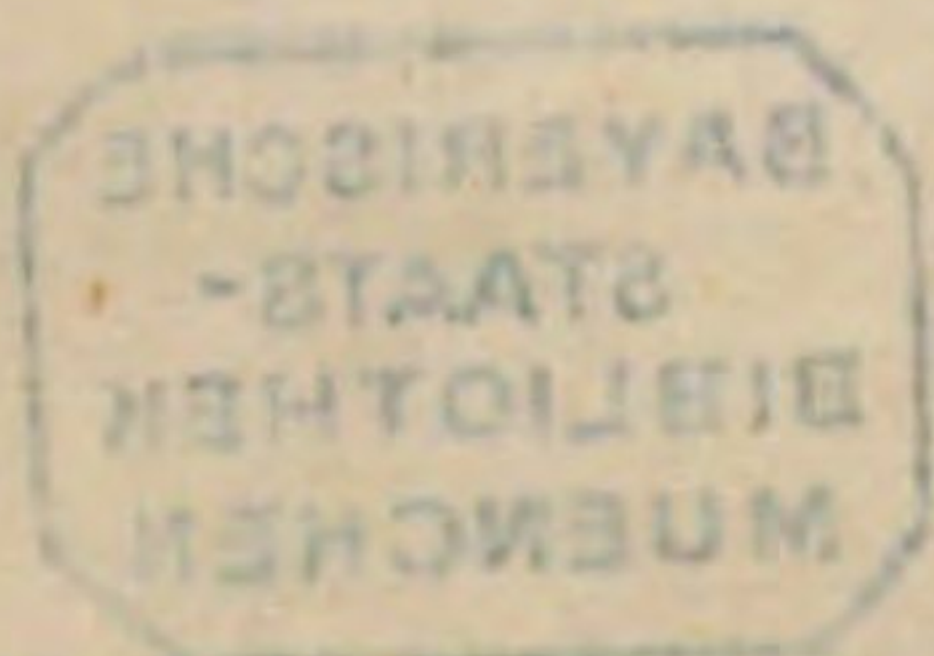
woraus man findet:

$$\operatorname{tg} A = \operatorname{tg} \lambda \cos A = \frac{\gamma_0}{60g} \sin 2\beta \cos^2 \sigma$$

Die Niveauerhebung ϱ wird nun durch das allgemeine Integral gegeben:

$$\frac{\tau \varrho \gamma_0}{60g} \sin 2\beta \int \cos^2 \sigma d\sigma = \frac{1}{4} \frac{\tau \varrho \gamma_0}{60g} \sin 2\beta [\sin 2\sigma + 2\sigma]$$

Sei von $\sigma = -3^h$ bis $\sigma = +3^h$, also gleich lange vor und nach der Mondculmination gearbeitet worden, und setzen wir $\beta = 45^\circ$, sodafs



$\varrho = 6366$ Kilometer, $g = 9806^{\text{mm}}$ wird, ferner wie früher $\tau = 1:900$ und $\gamma_0 = 0,03066^{\text{mm}}$, so liefert nach Einsetzung der Grenzen 0 und $\frac{1}{4}\pi$ das doppelte vorstehende Integral $c = 0,474^{\text{mm}}$ Niveauerhebung auf $1\frac{1}{2}$ Meilen Nivellement, allein durch den Mond. Wird auch dieser Maximalwerth nicht täglich erreicht werden, so leuchtet doch ein, dass in unseren Breiten die Correction c je nach der Stellung von Sonne und Mond zwar sehr ungleich ausfallen, sich aber auf grössere Strecken schon stark genug anhäufen wird um deren nachträgliche Berechnung aus dem Vergleich der Aufnahmshefte mit astronomischen Jahrbüchern und Landkarten zu rechtfertigen.





Vogler, Chrn. August

Über Ziele und Hülfsmittel geometrischer Präcisions-Nivellements

München 1873

Math.p. 620 d

urn:nbn:de:bvb:12-bsb11160386-7